

**LAPORAN PENELITIAN KOMPETITIF
TAHUN ANGGARAN 2016**

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN AIR DANGKAL PADA MASALAH
PERAMBATAN GELOMBANG MELALUI MEDIA BERPORI**

Nomor DIPA	:	DIPA BLU: DIPA-025.04.2.423812/2016
Tanggal	:	7 Desember 2015
Satker	:	(423812) UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
Kode Kegiatan	:	(2132) Peningkatan Akses, Mutu, Kesejahteraan dan Subsidi Pendidikan Tinggi Islam
Kode Sub Kegiatan	:	(008) Penelitian Bermutu
Kegiatan	:	(004) Dukungan Operasional Penyelenggaraan Pendidikan

OLEH

Mohammad Jamhuri, M.Si (198105022005011004)



**KEMENTERIAN AGAMA
LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT (LP2M)
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2016**

HALAMAN PENGESAHAN

Laporan penelitian ini disahkan oleh Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Pada Tanggal 31 Agustus 2016

Ketua Peneliti

Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 198105022005011004

Ketua LP2M
UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

Dr. Hj. Mufidah Ch., M.Ag
NIP. 196009101989032001

PERNYATAAN ORISINALITAS PENELITIAN

Kami yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP : 198105022005011004
Pangkat/Gol. Ruang : Lektor/IIIc
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Jabatan dalam Penelitian : Ketua Peneliti

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa dalam penelitian ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah di lakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis disebutkan dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila dikemudian hari ternyata dalam penelitian terbukti terdapat unsur-unsur penjiplakan dan pelanggaran etika akademik, maka kami bersedia mengembalikan dana penelitian yang telah kami terima dan diproses sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang berlaku.

Malang, 31 Agustus 2016

Ketua Peneliti



Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 198105022005011004

PERNYATAAN TIDAK SEDANG TUGAS BELAJAR

Yang bertanda tangan di bawah ini, Saya:

Nama : Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP : 19810502-200501-1004
Pangkat/Gol.Ruang : Lektor/IIIc
Tempat; Tgl. Lahir : Malang, 02 Mei 1981
Judul Penelitian : Solusi Numerik Persamaan Air Dangkal pada Masalah
Perambatan Gelombang melalui Media Berpori

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. Saya TIDAK SEDANG TUGAS BELAJAR.
2. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa saya sedang tugas belajar, maka secara langsung saya menyatakan mengundurkan diri dan mengembalikan dana yang telah kami terima dari Program Penelitian kompetitif 2016.

Demikian Surat Pernyataan ini saya buat sebagaimana mestinya.

Malang, 31 Agustus 2016
Yang membuat pernyataan,



Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 198105022005011004

PERNYATAAN KESANGGUPAN MENYELESAIKAN PENELITIAN

Kami yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP : 198105022005011004
Pangkat/Gol. Ruang : Lektor/IIIc
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Jabatan dalam Penelitian : Ketua Peneliti

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. Saya sanggup menyelesaikan dan menyerahkan hasil penelitian dengan batas waktu yang telah ditetapkan (31 Agustus 2016);
2. Apabila sampai batas waktu yang ditentukan saya belum menyerahkan laporan hasil, maka saya sanggup mengembalikan dana penelitian yang telah saya terima.

Malang, 31 Agustus 2016

Ketua Peneliti



Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 198105022005011004

Abstrak

Dalam artikel ini dipilih persamaan air-dangkal yang menyatakan perambatan gelombang melalui media berpori. Selanjutnya persamaan tersebut diselesaikan menggunakan metode beda hingga implisit forward-time centered space (FTCS). Dalam menyelesaikan masalah tersebut, digunakan kondisi batas serap untuk mewakili situasi fisis yang menyatakan gelombang terus berjalan melalui batas-batas domain perhitungan. Untuk mengamati performansi dari pemecah gelombang berporinya, digunakan gelombang soliter dan gelombang sinusoidal sebagai gelombang datang. Selanjutnya besarnya penurunan amplitudo dihitung berdasarkan amplitudo gelombang sebelum dan sesudah melalui pemecah gelombangnya. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan bahwa metode beda-hingga implisit cukup baik dan mudah diterapkan dalam penyelesaian sistem persamaan diferensial tersebut.

Abstrak

In this paper we considered the shallow-water equation that represent wave propagation through porous media. Furthermore, the equation is solved using the implicit finite difference method forward-time centered space (FTCS). In solving these problems, we use absorbed boundary conditions to represent the physical situation of the waves continuation to run through the confines of the calculation domain. To observe the performance of the porous breakwater, We used solitary wave and a sinusoidal wave as the wave transmission. Furthermore, the magnitude of decrease in amplitude is calculated based on the amplitude of the waveform before and after through breaking waves. Numerical simulations have shown that the implicit difference method-up pretty good and easy to apply in solving the system of differential equations.

Daftar Isi

PERNYATAAN TIDAK SEDANG TUGAS BELAJAR	4
1 BAB I	
PENDAHULUAN	10
1.1 Latar Belakang	10
1.2 Rumusan Masalah	11
1.3 Tujuan Penelitian	11
1.4 Manfaat	11
1.5 Sistematika Penulisan	12
2 BAB II	
STUDI PUSTAKA	13
2.1 Persamaan Pengatur	13
2.2 Metode Numerik	13
2.2.1 Metode Prediktor-Korektor	13
2.3 Metode Beda-Hingga Implisit	15
2.4 Metode Gauss-Seidel	16
3 BAB III	
METODE PENELITIAN	18
4 BAB IV	
PEMBAHASAN	19
4.1 Diskritisasi	19
4.2 Kondisi batas artifisial dengan Ekstrapolasi	21
4.3 Percobaan Numerik	29

4.4	Simulasi 1	33
4.5	Simulasi 2	34
4.6	Error Information	35
5	BAB V	
	Kesimpulan	45
	References	46
	Lampiran-1: Curriculum Vitae	49

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Masalah aliran fluida sangat menarik untuk di amati, karena terjadi pada berbagai jenis saluran baik terbuka maupun tertutup. Pada saluran tertutup, aliran fluida dapat terjadi pada pipa, tangki, selang, dll. Pada saluran terbuka, fluida mengalir pada atmosfer, lautan, sungai dan lain-lain.

Pada penelitian ini akan dibahas solusi numerik masalah aliran fluida pada saluran terbuka, khususnya yang mengalir melalui balok berpori. Pembahasan mengenai aliran fluida melalui sebuah balok telah dilakukan oleh (Yu & Mei, 2000), (Pudjaprasetya & Chendra, 2009), (L. H. Wiryanto, 2010). Selanjutnya (L. H. Wiryanto & Jamhuri, 2014) membahas aliran fluida melalui satu dan dua buah balok yang hasilnya dapat diperumum untuk masalah aliran fluida melalui n -buah balok. Sedangkan kajian tentang aliran fluida pada saluran dengan dasar berupa media berpori dimulai oleh (Mizumura, 1998), yang dilanjutkan oleh (Tsai, Chen, & Lee, 2006), (L. Wiryanto & Anwarus, 2009).

Pada tahap selanjutnya (L. H. Wiryanto, 2011) menurunkan model matematika untuk mengamati aliran fluida yang melalui media berpori. Penelitian tersebut menghasilkan sistem persamaan differensial parsial linier yang serupa dengan persamaan air-dangkal. Di sisi yang lain (Jamhuri, Kusumastuti, & Suharleni, 2013) mengkaji masalah yang sama dengan yang di kaji oleh (L. H. Wiryanto, 2011), tetapi dengan cara melinierisasi persamaan-persamaan pengatur dan menyelesaikannya menggunakan metode pemisahan variabel. Selanjutnya pada tahun 2015 (Jamhuri & Alisah, 2015) membahas tentang aliran fluida melalui serangkaian balok berpori yang berkesimpulan bahwa jumlah balok berpori tanpa ada perubahan total lebar balok tidak berpengaruh pada besarnya penurunan amplitudo gelombang.

Pada penelitian ini kita pilih model matematika yang telah diturunkan oleh Wiryanto (L. H. Wiryanto, 2011) untuk mensimulasikan masalah aliran fluida melalui balok berpori. Setelah menurunkan model, Wiryanto (L. H. Wiryanto, 2011) menunjukkan beberapa solusi numerik untuk masalah tersebut. Metode numerik yang digunakannya adalah eksplisit prediktor-korektor, dan untuk penyelesaian sistem persamaan linier yang dihasilkan Dia menggunakan iterasi Gauss-Seidel. Meskipun demikian penyelesaian secara implisit menggunakan metode tersebut sangat tidak efisien.

Pada penelitian akan kita selesaikan sistem persamaan differensial parsial yang diperoleh oleh (L. H. Wiryanto, 2011) menggunakan metode beda-hingga implisit. Kita pilih metode

implisit karena kestabilan dari metode ini selalu dapat diperoleh dan tanpa syarat (Zhu, Yuan, & Sun, 2004), sehingga dalam melakukan simulasi kita dapat memilih time-step yang cukup besar.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana solusi numerik persamaan air dangkal pada masalah perambatan gelombang melalui media berpori menggunakan metode beda-hingga implisit.
2. Bagaimana hasil yang diperoleh dari metode beda-hingga implisit jika dibandingkan dengan metode prediktor-korektor yang digunakan oleh Wiryanto.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah diatas, maka penelitian ini bertujuan untuk membahas:

1. Penerapan metode beda-hingga implisit untuk penyelesaian model matematika pada masalah aliran fluida melalui balok berpori.
2. Membandingkan hasil yang diperoleh dari metode beda hingga implisit dengan hasil yang diperoleh dari metode prediktor korektor.

1.4 Manfaat

1. Menjelaskan pemakaian metode beda-hingga implisit dalam penyelesaian sistem persamaan diferensial parsial
2. Membandingkan hasil yang diperoleh dari kedua metode sehingga pembaca dapat mengetahui kapan metode-metode tersebut harus digunakan.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penelitian ini disusun sebagaimana berikut:

1. Model matematika dan metode numerik yang digunakan ditulis pada bab II.
2. Langkah-langkah penyelesaian dituliskan pada bab III.
3. Hasil-hasil numerik dan simulasi akan di bahas di bab IV.
4. Kesimpulan dan saran di tulis di bab V.

BAB II

STUDI PUSTAKA

2.1 Persamaan Pengatur

Model matematika untuk aliran fluida melalui balok berpori yang diturunkan oleh Wiryanto (L. H. Wiryanto, 2011) adalah

$$u_t + g\eta_x = 0 \quad (2.1)$$

$$\eta_t + hu_x = (d - h)k\eta_{xx} \quad (2.2)$$

yang merupakan sistem persamaan differensial parsial linier. Pada persamaan tersebut, η menyatakan perubahan ketinggian permukaan fluida, u adalah kecepatan potensial dalam arah- x , dengan x dan t secara berturut-turut menyatakan dimensi ruang dan waktu. Sedangkan d dan h secara berturut-turut menyatakan kedalaman saluran dan ketinggian dari balok berporinya, dan k adalah konduktivitas hidroliknya yang menyatakan koefisien porositas dari balok.

Persamaan (2.1) dan (2.2) serupa dengan persamaan air dangkal atau SWE (shallow-water equations), yang memuat suku tambahan berupa turunan kedua yang menyatakan efek dari balok berpori. Jika balok berpori-nya ditiadakan ($d = h$), maka persamaan (2.2) akan sama dengan persamaan air-dangkal linier, demikian juga jika partikel tidak dapat melalui balok berpori maka konduktivitas hidroliknya tidak ada ($k = 0$).

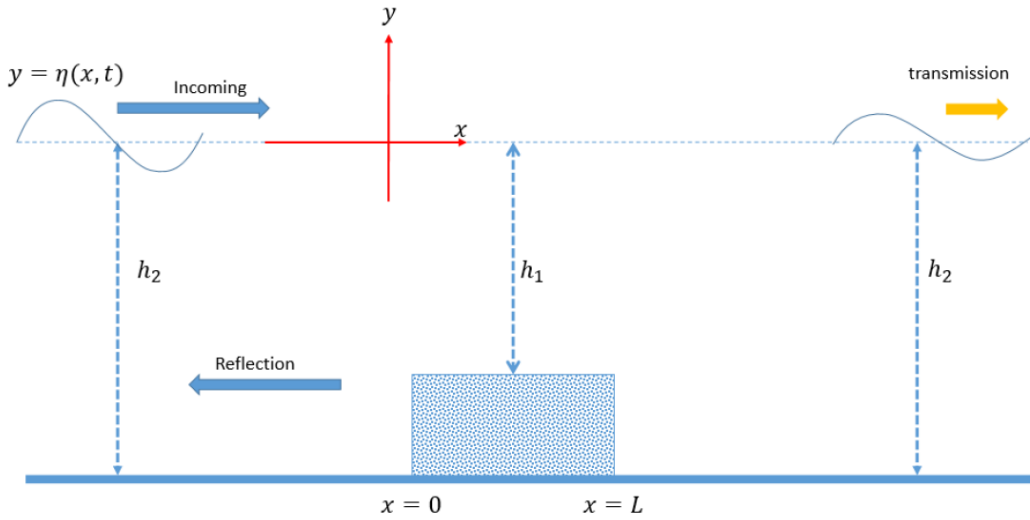
Ilustrasi dari permasalahan aliran fluida melalui balok berpori yang dinyatakan dalam persamaan (2.1) dan (2.2) ditunjukkan pada gambar 2.1.

2.2 Metode Numerik

Pada bagian ini akan kita bahas metode prediktor-korektor dan metode beda-hingga implisit yang akan digunakan untuk menyelesaikan model matematika yang diturunkan oleh Wiryanto (L. H. Wiryanto, 2011).

2.2.1 Metode Prediktor-Korektor

Disini kita bahas ulang metode prodiktor korektor yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan (2.1) dan (2.2). Pertama variabel ruang x dan waktu t kita diskritkan



Gambar 2.1: Sketsa aliran fluida melalui balok berpori

sebagai $x_j = j\Delta x$ untuk $j = 0, 1, 2, \dots$ dan $t^n = n\Delta t$ untuk $n = 0, 1, 2, \dots$. Kemudian η dan u dituliskan secara diskrit dalam bentuk

$$\eta(x_j, t^n) \approx \eta_j^n \quad \text{dan} \quad u(x_j, t^n) \approx u_j^n \quad (2.3)$$

disini subskrip j menyatakan indeks diskritisasi ruang dan superskrip n menyatakan indeks diskritisasi waktu.

Metode prediktor korektor yang digunakan oleh Wiryanto dalam (L. H. Wiryanto, 2011) adalah sebagai berikut. Sebagai prediktor digunakan skema FTCS (forward time centered space) pada persamaan dan (2.2) dan skema FTACS (*forward time average centered space*) pada persamaan (2.1) sehingga diperoleh

$$\bar{\eta}_j^{n+1} = \eta_j^n - \Delta t \left[h \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - (d - h) k \frac{\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n + \eta_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right], \quad (2.4)$$

dan

$$\bar{u}_j^{n+1} = u_j^n - \frac{g\Delta t}{4\Delta x} [\bar{\eta}_{j+1}^{n+1} - \bar{\eta}_{j-1}^{n+1} + \eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n] \quad (2.5)$$

disini digunakan $\bar{\eta}_j^{n+1}$ dan \bar{u}_j^{n+1} sebagai prediktor dari η dan u .

Nilai-nilai tersebut selanjutnya dikoreksi dengan persamaan korektor yang dibentuk menggunakan skema FTACS untuk persamaan (2.1) dan (2.2). Karena metode yang pakai pada korektor berbentuk implisit, maka akan diperoleh sistem persamaan

$$a_1 \eta_{j+1}^{n+1} + a_0 \eta_j^{n+1} + a_{-1} \eta_{j-1}^{n+1} = b \quad (2.6)$$

dengan koefisien-koefisien

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{(d-h)k}{2\Delta x^2}, & a_0 &= \frac{1}{\Delta t} + \frac{(d-h)k}{\Delta x^2}, & a_{-1} &= a_1 \\ b &= \frac{\eta_j^n}{\Delta t} + (d-h)k \frac{\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n + \eta_{j-1}^n}{2\Delta x^2} - h \frac{\bar{u}_{j+1}^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{4\Delta x} \end{aligned}$$

Selanjutnya sistem persamaan (2.6) dapat diselesaikan menggunakan iterasi Gauss-Seidel. Setelah diperoleh η_j^{n+1} , korektor u_j^{n+1} dihitung menggunakan formula sebagaimana pada langkah menghitung prediktor, yaitu

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{g\Delta t}{4\Delta x} [\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1} + \eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n].$$

2.3 Metode Beda-Hingga Implisit

Untuk menerapkan metode beda-hingga implisit kita menggunakan diskritisasi terhadap ruang x dan waktu t sebagaimana pada metode prediktor-korektor yaitu $x_j = j\Delta x$ untuk $j = 0, 1, 2, \dots$ dan $t^n = n\Delta t$ untuk $n = 0, 1, 2, \dots$. Kemudian η dan u dituliskan secara diskrit dalam bentuk

$$\eta(x_j, t^n) \approx \eta_j^n \quad \text{dan} \quad u(x_j, t^n) \approx u_j^n \quad (2.7)$$

Skema yang akan kita gunakan adalah FTCS untuk persamaan (2.1) dan (2.2), sehingga diperoleh

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + g \frac{\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad (2.8)$$

dan

$$\frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\Delta t} + h \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} - (d-h)k \frac{\eta_{j+1}^{n+1} - 2\eta_j^{n+1} + \eta_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad (2.9)$$

Persamaan (2.8) dan (2.9) dapat ditulis ulang menjadi

$$a_1 u_j^{n+1} - a_2 \eta_{j-1}^{n+1} + a_2 \eta_{j+1}^{n+1} = a_1 u_j^n \quad (2.10)$$

$$-a_3 u_{j-1}^{n+1} + a_3 u_{j+1}^{n+1} - a_4 \eta_{j-1}^{n+1} + (a_1 + 2a_4) \eta_j^{n+1} - a_4 \eta_{j+1}^{n+1} = a_1 \eta_j^n \quad (2.11)$$

dengan koefisien-koefisien

$$a_1 = \frac{1}{\Delta t}, \quad a_2 = \frac{g}{2\Delta x}, \quad a_3 = \frac{h}{2\Delta x}, \quad a_4 = \frac{(d-h)k}{\Delta x^2}.$$

Jik indeks $j = 2, \dots, M - 1$ diterapkan pada persamaan (2.10) dan (2.11) akan diperoleh sistem persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
a_1 u_2^{n+1} - a_2 \eta_1^{n+1} + a_2 \eta_3^{n+1} &= a_1 u_2^n \\
-a_3 u_1^{n+1} + a_3 u_3^{n+1} - a_4 \eta_1^{n+1} + (a_1 + 2a_4) \eta_2^{n+1} - a_4 \eta_3^{n+1} &= a_1 \eta_2^n \\
\\
a_1 u_3^{n+1} - a_2 \eta_2^{n+1} + a_2 \eta_4^{n+1} &= a_1 u_3^n \\
-a_3 u_2^{n+1} + a_3 u_4^{n+1} - a_4 \eta_2^{n+1} + (a_1 + 2a_4) \eta_3^{n+1} - a_4 \eta_4^{n+1} &= a_1 \eta_3^n \\
\\
&\vdots \\
\\
a_1 u_{M-1}^{n+1} - a_2 \eta_{M-2}^{n+1} + a_2 \eta_M^{n+1} &= a_1 u_{M-1}^n \\
-a_3 u_{M-2}^{n+1} + a_3 u_M^{n+1} - a_4 \eta_{M-2}^{n+1} + (a_1 + 2a_4) \eta_{M-1}^{n+1} - a_4 \eta_M^{n+1} &= a_1 \eta_{M-1}^n
\end{aligned}$$

selanjutnya sistem diatas dapat diselesaikan menggunakan metode iterasi Gauss-Seidel ataupun metode iterasi Jacobi (Chapra & Canale, 1998, hal. 227-339).

2.4 Metode Gauss-Seidel

Metode Gauss-Seidel digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear (SPL) berukuran besar dan proporsi koefisien nolnya besar, seperti sistem-sistem yang banyak ditemukan dalam sistem persamaan diferensial. Metode iterasi Gauss-Seidel dikembangkan dari gagasan metode iterasi pada solusi persamaan tak linier.

Teknik iterasi jarang digunakan untuk menyelesaikan SPL berukuran kecil karena metode-metode langsung seperti metode eliminasi Gauss lebih efisien daripada metode iteratif. Akan tetapi, untuk SPL berukuran besar dengan persentase elemen nol pada matriks koefisien besar, teknik iterasi lebih efisien daripada metode langsung dalam hal penggunaan memori komputer maupun waktu komputasi. Dengan metode iterasi Gauss-Seidel sesatan pembulatan dapat diperkecil karena dapat meneruskan iterasi sampai solusinya seteliti mungkin sesuai dengan batas sesatan yang diperbolehkan.

Suatu sistem persamaan linier terdiri atas sejumlah berhingga persamaan linear dalam sejumlah berhingga variabel. Menyelesaikan suatu sistem persamaan linier adalah mencari nilai-nilai variabel yang belum diketahui yang memenuhi semua persamaan linier yang diberikan.

Rumus iterasi untuk hampiran ke-k pada metode iterasi Gauss-Seidel adalah sebagai berikut.

Untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan $k = 1, 2, 3, \dots$,

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.12)$$

secara lebih detil dapat dilihat pada langkah-langkah penyelesaian sistem berikut ini:

- Untuk menyelesaikan $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ diberikan hampiran nilai awal $\mathbf{x}^{(0)}$
- Input:
 - banyaknya persamaan n ,
 - elemen-elemen matriks \mathbf{A} , yaitu $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$,
 - elemen-elemen matriks \mathbf{b} atau $b_i, 1 \leq i \leq n$
 - nilai awal $\mathbf{x}_i^{(0)}, 1 \leq i \leq n$,
 - Toleransi error tol , dan
 - banyak iterasi maksimum N .
- Output:
 - solusi hampiran x_1, x_2, \dots, x_n atau pesan yang menyatakan iterasi maksimum sudah dilalui.

Atau jika dalam dituliskan dalam bentuk algoritma/*pseudo code* adalah sebagai berikut ini:

step 1 set $k = 1$

step 2 while $(k \leq N)$ do step 3-6

step 3 for $i = 1, \dots, n$

$$\text{set } x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(0)} + b_i \right]$$

step 4 if $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\| < tol$ then output (x_1, \dots, x_n) ; (the prosedure was successful.),
STOP.

step 5 set $k = k + 1$

step 6 for $i = 1, \dots, n$ set $\mathbf{x}_i^{(0)} = \mathbf{x}_i$

step 7 output('maximum number of iterations exceeded'). STOP

BAB III

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif melalui literatur. Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan dalam pelaksanaan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendiskritkan model matematika yang akan dicari solusinya menggunakan skema FTCS implisit.
2. Untuk setiap superskrip- n dengan n mulai dari 2, dilakukan substitusi subskrip i yang menyatakan indeks ruang terhadap model diskrit yang telah diperoleh untuk $i = 2, 3, \dots, M-1$.
3. Membentuk sistem persamaan linier yang sebanyak $2 \times (M-2)$ persamaan dengan $2 \times (M-2)$ variabel yang tak diketahui.
4. Menyelesaikan sistem persamaan yang telah diperoleh untuk menentukan nilai-nilai dari u_j^n dan η_j^n dengan menyederhanakan terlebih dahulu kedalam bentuk persamaan matrik.
5. Menggunakan solusi u_j^n dan η_j^n untuk menghitung nilai u_j^{n+1} dan η_j^{n+1} untuk waktu berikutnya dengan mengulang langkah nomor-2 sampai langkah nomor-4.
6. Membuat simulasi dari hasil numerik yang diperoleh.
7. Melakukan perbandingan solusi dari metode prediktor-korektor dengan metode beda-hingga implisit.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Diskritisasi

Pada bab ini akan kita bahas bagaimana menerapkan metode implisit dalam penyelesaian numerik masalah persamaan gelombang air-dangkal

$$u_t + g\eta_x = 0 \quad (4.1)$$

$$\eta_t + hu_x = (d - h)k\eta_{xx} \quad (4.2)$$

dengan diberikan kondisi awal

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{dan} \quad \eta(x, 0) = \psi(x) \quad (4.3)$$

Persamaan (4.1) dan (4.2) kita diskritkan secara implisit menggunakan metode beda hingga skema *forward-time centered-space* (FTCS) menjadi

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + g \frac{\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\Delta t} + h \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = (d - h)k \frac{\eta_{j+1}^{n+1} - 2\eta_j^{n+1} + \eta_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (4.5)$$

sedangkan kondisi awal (4.3) dapat didiskritkan menjadi

$$u_j^1 = \phi_j \quad \text{dan} \quad \eta_j^1 = \psi_j \quad (4.6)$$

dengan $\phi_j = \phi(x_j)$ atau $\phi(j\Delta x)$ dan $\psi_j = \psi(x_j)$ atau $\psi(j\Delta x)$. Indeks waktu $(n + 1)$ yang melekat pada super skrip u dan η menyatakan suku-suku yang belum diketahui, sedangkan indeks waktu (n) pada superskrip u dan η menyatakan suku-suku yang diketahui. Selanjutnya, dengan menuliskan suku-suku yang memiliki indeks waktu $(n + 1)$ di ruas kiri dan yang lainnya di ruas kanan persamaan (4.4) dan (4.5) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}u_j^{n+1} + \frac{g}{2\Delta x}\eta_{j+1}^{n+1} - \frac{g}{2\Delta x}\eta_{j-1}^{n+1} &= \frac{1}{\Delta t}u_j^n \\ \frac{1}{\Delta t}\eta_j^{n+1} + \frac{h}{2\Delta x}u_{j+1}^{n+1} - \frac{h}{2\Delta x}u_{j-1}^{n+1} - \frac{(d-h)k}{\Delta x^2}\eta_{j+1}^{n+1} + \\ \frac{2(d-h)k}{\Delta x^2}\eta_j^{n+1} + \frac{(d-h)k}{\Delta x^2}\eta_{j-1}^{n+1} &= \frac{1}{\Delta t}\eta_j^n \end{aligned}$$

Persamaan-persamaan diatas kita sederhanakan lagi dengan melakukan pengelompokan terhadap suku-suku yang memiliki indeks subskrip dan superskrip yang sama, yaitu diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} u_j^{n+1} - \frac{g}{2\Delta x} \eta_{j-1}^{n+1} + \frac{g}{2\Delta x} \eta_{j+1}^{n+1} &= \frac{1}{\Delta t} u_j^n \\ -\frac{h}{2\Delta x} u_{j-1}^{n+1} + \frac{h}{2\Delta x} u_{j+1}^{n+1} + \frac{(d-h)k}{\Delta x^2} \eta_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2(d-h)k}{\Delta x^2} \right) \eta_j^{n+1} - \\ &\quad \frac{(d-h)k}{\Delta x^2} \eta_{j+1}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \eta_j^n \end{aligned}$$

Persamaan diatas dapat dituliskan kembali secara lebih sederhana menjadi

$$a_1 u_j^{n+1} - a_2 \eta_{j-1}^{n+1} + a_2 \eta_{j+1}^{n+1} = a_1 u_j^n \quad (4.7)$$

$$-a_3 u_{j-1}^{n+1} + a_3 u_{j+1}^{n+1} - a_4 \eta_{j-1}^{n+1} + (a_1 + 2a_4) \eta_j^{n+1} - a_4 \eta_{j+1}^{n+1} = a_1 \eta_j^n \quad (4.8)$$

dengan memisalkan koefisien-koefisien konstan dari persamaan (4.7) dan (4.8) sebagai

$$a_1 = \frac{1}{\Delta t}, \quad a_2 = -\frac{g}{2\Delta x}, \quad a_3 = \frac{h}{2\Delta x}, \quad a_4 = \frac{(d-h)k}{\Delta x^2}.$$

Untuk $n = 1$, kita dapat mensubstitusikan kondisi awal (4.6) pada persamaan (4.7) dan (4.8), sedemikian hingga kita peroleh

$$a_1 u_j^2 - a_2 \eta_{j-1}^2 + a_2 \eta_{j+1}^2 = a_1 \phi_j \quad (4.9)$$

$$-a_3 u_{j-1}^2 + a_3 u_{j+1}^2 - a_4 \eta_{j-1}^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_j^2 - a_4 \eta_{j+1}^2 = a_1 \psi_j \quad (4.10)$$

Proses selanjutnya adalah menjabarkan persamaan (4.9) dan (4.10) dengan mensubstitusi indeks j untuk $j = 1, 2, \dots, m$. Hasil yang diperoleh dari penjabaran persamaan (4.9) adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} j=1 &\rightarrow a_1 u_1^2 - a_2 \eta_0^2 + a_2 \eta_2^2 = a_1 \phi_1 \\ j=2 &\rightarrow a_1 u_2^2 - a_2 \eta_1^2 + a_2 \eta_3^2 = a_1 \phi_2 \\ j=3 &\rightarrow a_1 u_3^2 - a_2 \eta_2^2 + a_2 \eta_4^2 = a_1 \phi_3 \\ &\vdots \rightarrow \vdots = \vdots \\ j=m-1 &\rightarrow a_1 u_{m-1}^2 - a_2 \eta_{m-2}^2 + a_2 \eta_m^2 = a_1 \phi_{m-1} \\ j=m &\rightarrow a_1 u_m^2 - a_2 \eta_{m-1}^2 + a_2 \eta_{m+1}^2 = a_1 \phi_m \end{aligned} \quad (4.11)$$

sedangkan dari persamaan (4.10) di peroleh:

$$\begin{aligned}
j = 1 & \Rightarrow -a_3 u_0^2 + a_3 u_2^2 - a_4 \eta_0^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_1^2 - a_4 \eta_2^2 &= a_1 \psi_1 \\
j = 2 & \Rightarrow -a_3 u_1^2 + a_3 u_3^2 - a_4 \eta_1^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_2^2 - a_4 \eta_3^2 &= a_1 \psi_2 \\
j = 3 & \Rightarrow -a_3 u_2^2 + a_3 u_4^2 - a_4 \eta_2^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_3^2 - a_4 \eta_4^2 &= a_1 \psi_3 \\
& \vdots & \Rightarrow \vdots &= \vdots \\
j = m-1 & \Rightarrow -a_3 u_{m-2}^2 + a_3 u_m^2 - a_4 \eta_{m-2}^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_{m-1}^2 - a_4 \eta_m^2 &= a_1 \psi_{m-2} \\
j = m & \Rightarrow -a_3 u_{m-1}^2 + a_3 u_{m+1}^2 - a_4 \eta_{m-1}^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_m^2 - a_4 \eta_{m+1}^2 &= a_1 \psi_m
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Pada sistem persamaan linier (4.11) dan (4.12) diatas, terdapat variabel-variabel tak diketahui yang menyatakan titik-titik yang berada diluar domain perhitungan, yaitu η_0^2, η_{m+1}^2 serta u_0^2, u_{m+1}^2 . Titik-titik yang berada diluar domain perhitungan tersebut tidak dapat diperoleh atau diukur, titik-titik tersebut seringkali disebut sebagai *ghost-points*. Keberadaan *ghost-points* pada sistem tersebut menyebabkan sistem tersebut secara natural tidak dapat diselesaikan. Untuk mengatasi masalah tersebut, persamaan-persamaan yang memuat *ghost point* akan kita ganti dengan persamaan-persamaan artifisial yang di bangkitkan menggunakan ekstrapolasi linier berdasarkan data pada titik-titik grid interior domain perhitungan. Jika persamaan-persamaan yang memuat *ghost points* dalam sistem diatas dieliminasi maka diperoleh

$$\begin{aligned}
j = 2 & \rightarrow a_1 u_2^2 - a_2 \eta_1^2 + a_2 \eta_3^2 &= a_1 \phi_2 \\
j = 3 & \rightarrow a_1 u_3^2 - a_2 \eta_2^2 + a_2 \eta_4^2 &= a_1 \phi_3 \\
& \vdots & \rightarrow \vdots &= \vdots \\
j = m-1 & \rightarrow a_1 u_{m-1}^2 - a_2 \eta_{m-2}^2 + a_2 \eta_m^2 &= a_1 \phi_{m-1}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

dan

$$\begin{aligned}
j = 2 & \Rightarrow -a_3 u_1^2 + a_3 u_3^2 - a_4 \eta_1^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_2^2 - a_4 \eta_3^2 &= a_1 \psi_2 \\
j = 3 & \Rightarrow -a_3 u_2^2 + a_3 u_4^2 - a_4 \eta_2^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_3^2 - a_4 \eta_4^2 &= a_1 \psi_3 \\
& \vdots & \Rightarrow \vdots &= \vdots \\
j = m-1 & \Rightarrow -a_3 u_{m-2}^2 + a_3 u_m^2 - a_4 \eta_{m-2}^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_{m-1}^2 - a_4 \eta_m^2 &= a_1 \psi_{m-2} \blacksquare
\end{aligned} \tag{4.14}$$

4.2 Kondisi batas artifisial dengan Ekstrapolasi

Ekstrapolasi disini kita definisikan sebagaimana yang terdapat pada kamus besar bahasa indonesia (KBBI) yaitu: sebagai perluasan data di luar data yang tersedia. Dalam penelitian ini data yang dianggap tersedia adalah nilai-nilai η dan u yang berada dalam interior domain, serta semua nilai yang telah diperoleh dari perhitungan waktu sebelumnya. Ekstrapolasi yang akan kita gunakan adalah ekstrapolasi linier atau orde-1, karena ekstrapolasi dengan

orde yang lebih tinggi akan menemui kesulitan di dalam memperoleh data untuk membangun ekstrapolasinya.

Metode ekstrapolasi linier dapat kita peroleh menggunakan deret Taylor orde-1, yaitu titik-titik yang berada pada batas kita hitung menggunakan titik-titik yang ada disekitar titik batas. Secara lebih detail yaitu: nilai u dan η pada koordinat (x_1, t^2) kita ekspansi menggunakan nilai-nilai u dan η yang berada di sekitaran koordinat (x_2, t^1) , sedangkan nilai u dan η pada koordinat (x_m, t^2) kita ekspansi menggunakan nilai-nilai u dan η yang berada di sekitaran koordinat (x_{m-1}, t^1) . Untuk memudahkan pemahaman dalam penerapan deret Taylor, koordinat (x_1, t^2) , (x_2, t^1) , (x_m, t^2) , (x_{m-1}, t^1) secara berturut-turut kita tuliskan secara lebih umum sebagai $(x_1, t^1 + \Delta t)$, $(x_1 + \Delta x, t^1)$, $(x_m, t^1 + \Delta t)$, $(x_m - \Delta x, t^1)$ sedemikian hingga kita peroleh deret Taylor untuk beberapa titik yang diperlukan sebagai berikut:

- Ekspansi deret Taylor nilai u_1^2 disekitaran nilai u_2^1 . Sebagaimana sebelumnya, suku u_1^2 dapat kita tuliskan kembali sebagai fungsi $u(x_1, t^2) = u(\Delta x, 2\Delta t)$ dan u_2^1 sebagai $u(x_2, t^1) = u(2\Delta x, \Delta t)$ sedemikian hingga diperoleh deret Taylor sebagai berikut

$$\begin{aligned} u(\Delta x, 2\Delta t) &= u(2\Delta x, \Delta t) + \frac{\partial}{\partial x} u(2\Delta x, \Delta t) (\Delta x) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} u(2\Delta x, \Delta t) (\Delta t) \end{aligned}$$

Pada persamaan diatas turunan terhadap x kita hampiri dengan persamaan beda pusat dan turunan terhadap t kita hampiri dengan turunan beda maju, sedemikian hingga diperoleh

$$\begin{aligned} u(\Delta x, 2\Delta t) &= u(2\Delta x, \Delta t) + \frac{u(3\Delta x, \Delta t) - u(\Delta x, \Delta t)}{2\Delta x} (\Delta x) \\ &\quad + \frac{u(2\Delta x, 2\Delta t) - u(2\Delta x, \Delta t)}{\Delta t} (\Delta t) \end{aligned}$$

persamaan diatas dapat kita sederhanakan menjadi,

$$\begin{aligned} u(\Delta x, 2\Delta t) &= u(2\Delta x, \Delta t) + \frac{1}{2} [u(3\Delta x, \Delta t) - u(\Delta x, \Delta t)] \\ &\quad + u(2\Delta x, 2\Delta t) - u(2\Delta x, \Delta t) \end{aligned}$$

Jika persamaan diatas kita tuliskan kembali dalam bentuk diskrit, maka diperoleh

$$u_1^2 = u_2^1 + \frac{1}{2} (u_3^1 - u_1^1) + u_2^2 - u_2^1$$

dengan melakukan pengelompokan suku-suku yang memuat indeks waktu 2 diruas

kiri, dan yang lainnya diruas kana diperoleh

$$u_1^2 - u_2^2 = \frac{1}{2} (u_3^1 - u_1^1) \quad (4.15)$$

jika kemudian kita substitusikan kondisi awal $u_j^1 = \phi_j$ maka diperoleh

$$u_1^2 - u_2^2 = \frac{1}{2} (\phi_3 - \phi_1)$$

- Ekspansi deret Taylor nilai u pada titik (x_1, t^2) menggunakan nilai-nilai u disekitaran titik (x_2, t^1) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} u(\Delta x, 2\Delta t) &= u(2\Delta x, \Delta t) + \frac{\partial}{\partial x} u(2\Delta x, \Delta t) (-\Delta x) + \frac{\partial}{\partial t} u(2\Delta x, \Delta t) (\Delta t) \\ &= u(2\Delta x, \Delta t) - \frac{u(3\Delta x, \Delta t) - u(\Delta x, \Delta t)}{2\Delta x} (\Delta x) \\ &\quad + \frac{u(2\Delta x, 2\Delta t) - u(2\Delta x, \Delta t)}{\Delta t} (\Delta t) \end{aligned}$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} u(\Delta x, 2\Delta t) &= u(2\Delta x, \Delta t) - \frac{1}{2} (u(3\Delta x, \Delta t) - u(\Delta x, \Delta t)) \\ &\quad + u(2\Delta x, 2\Delta t) - u(2\Delta x, \Delta t) \end{aligned}$$

atau jika kita tuliskan dalam bentuk $u_j^n = u(x_j, t^n)$ dengan $x_j = j\Delta x$ dan $t^n = n\Delta t$ maka persamaan diatas menjadi

$$u_1^2 = u_2^1 - \frac{1}{2} (u_3^1 - u_1^1) + u_2^2 - u_2^1$$

dengan mengelompokkan suku yang indeks waktunya 2 di ruas kiri dan yang lainnya diruas kanan, diperoleh

$$u_1^2 - u_2^2 = u_2^1 - \frac{1}{2} (u_3^1 - u_1^1) - u_2^1 \quad (4.16)$$

jika kemudian kita substitusikan kondisi awal $u_j^1 = \phi_j$ maka diperoleh

$$u_1^2 - u_2^2 = \phi_2 - \frac{1}{2} (\phi_3 - \phi_1) - \phi_2$$

- Ekspansi deret Taylor nilai η_1^2 disekitaran nilai η_2^1 adalah

$$\begin{aligned}\eta(\Delta x, 2\Delta t) &= \eta(2\Delta x, \Delta t) + \frac{\partial}{\partial x}\eta(2\Delta x, \Delta t)(-\Delta x) + \frac{\partial}{\partial t}\eta(2\Delta x, \Delta t)(\Delta t) \\ &= \eta(2\Delta x, \Delta t) - \frac{\eta(3\Delta x, \Delta t) - \eta(\Delta x, \Delta t)}{2\Delta x}(\Delta x) \\ &\quad + \frac{\eta(2\Delta x, 2\Delta t) - \eta(2\Delta x, \Delta t)}{\Delta t}(\Delta t)\end{aligned}$$

dimana $\eta_1^2 = \eta(x_1, t^2) = \eta(\Delta x, 2\Delta t)$ dan $\eta_2^1 = \eta(x_2, t^1) = \eta(2\Delta x, \Delta t)$. Persamaan diatas kita sederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}\eta(\Delta x, 2\Delta t) &= \eta(2\Delta x, \Delta t) - \frac{1}{2}(\eta(3\Delta x, \Delta t) - \eta(\Delta x, \Delta t)) \\ &\quad + \eta(2\Delta x, 2\Delta t) - \eta(2\Delta x, \Delta t)\end{aligned}$$

yang jika kita kembalikan dalam bentuk indeks akan diperoleh

$$\eta_1^2 = \eta_2^1 - \frac{1}{2}(\eta_3^1 - \eta_1^1) + \eta_2^2 - \eta_2^1$$

dengan mengelompokkan suku yang indeks waktunya 2 di ruas kiri dan yang lainnya di ruas kanan, diperoleh

$$\eta_1^2 - \eta_2^2 = \eta_2^1 - \frac{1}{2}(\eta_3^1 - \eta_1^1) - \eta_2^1 \quad (4.17)$$

jika kemudian kita substitusikan kondisi awal $\eta_j^1 = \psi_j$ maka diperoleh

$$\boxed{\eta_1^2 - \eta_2^2 = \psi_2 - \frac{1}{2}(\psi_3 - \psi_1) - \psi_2}$$

- Ekspansi deret Taylor nilai u_m^2 disekitaran nilai u_{m-1}^1 . Sebagaimana sebelumnya, suku u_m^2 dapat kita tuliskan kembali sebagai fungsi kontinu $u(x_m, t^2) = u(m\Delta x, 2\Delta t)$ dan u_{m-1}^1 sebagai $u(x_{m-1}, t^1) = u((m-1)\Delta x, \Delta t)$ sedemikian hingga diperoleh deret Taylor sebagai berikut

$$\begin{aligned}u(m\Delta x, 2\Delta t) &= u((m-1)\Delta x, \Delta t) + \frac{\partial}{\partial x}u((m-1)\Delta x, \Delta t)(\Delta x) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t}u((m-1)\Delta x, \Delta t)(\Delta t)\end{aligned}$$

Pada persamaan diatas turunan terhadap x kita hampiri dengan persamaan beda pusat dan turunan terhadap t kita hampiri dengan turunan beda maju, sedemikian hingga

diperoleh

$$u(m\Delta x, 2\Delta t) = u((m-1)\Delta x, \Delta t) + \frac{u(m\Delta x, \Delta t) - u((m-2)\Delta x, \Delta t)}{2\Delta x}(\Delta x) \\ + \frac{u((m-1)\Delta x, 2\Delta t) - u((m-1)\Delta x, \Delta t)}{\Delta t}(\Delta t)$$

persamaan diatas dapat kita sederhanakan menjadi,

$$u(m\Delta x, 2\Delta t) = u((m-1)\Delta x, \Delta t) + \frac{1}{2}[u(m\Delta x, \Delta t) - u((m-2)\Delta x, \Delta t)] \\ + u((m-1)\Delta x, 2\Delta t) - u((m-1)\Delta x, \Delta t)$$

Jika persamaan diatas kita tuliskan kembali dalam bentuk diskrit, maka diperoleh

$$u_m^2 = u_{m-1}^1 + \frac{1}{2}(u_m^1 - u_{m-2}^1) + u_{m-1}^2 - u_{m-1}^1$$

dengan melakukan pengelompokan suku-suku yang memuat indeks waktu 2 diruas kiri, dan yang lainnya diruas kanan diperoleh

$$-u_{m-1}^2 + u_m^2 = u_{m-1}^1 + \frac{1}{2}(u_m^1 - u_{m-2}^1) - u_{m-1}^1 \quad (4.18)$$

jika kemudian kita substitusikan kondisi awal $u_j^1 = \phi_j$ maka diperoleh

$$-u_{m-1}^2 + u_m^2 = \phi_{m-1} + \frac{1}{2}(\phi_m - \phi_{m-2}) - \phi_{m-1}$$

- Ekspansi deret Taylor nilai η_m^2 disekitaran nilai u_{m-1}^1 . Sebagaimana sebelumnya, suku η_m^2 dapat kita tuliskan kembali sebagai fungsi kontinu $\eta(x_m, t^2) = \eta(m\Delta x, 2\Delta t)$ dan η_{m-1}^1 sebagai $\eta(x_{m-1}, t^1) = \eta((m-1)\Delta x, \Delta t)$ sedemikian hingga diperoleh deret Taylor sebagai berikut

$$\eta(m\Delta x, 2\Delta t) = \eta((m-1)\Delta x, \Delta t) + \frac{\partial}{\partial x}\eta((m-1)\Delta x, \Delta t)(\Delta x) \\ + \frac{\partial}{\partial t}\eta((m-1)\Delta x, \Delta t)(\Delta t)$$

Pada persamaan diatas turunan terhadap x kita hampiri dengan persamaan beda pusat dan turunan terhadap t kita hampiri dengan turunan beda maju, sedemikian hingga diperoleh

$$\eta(m\Delta x, 2\Delta t) = \eta((m-1)\Delta x, \Delta t) + \frac{\eta(m\Delta x, \Delta t) - \eta((m-2)\Delta x, \Delta t)}{2\Delta x}(\Delta x) \\ + \frac{\eta((m-1)\Delta x, 2\Delta t) - \eta((m-1)\Delta x, \Delta t)}{\Delta t}(\Delta t)$$

persamaan diatas dapat kita sederhanakan menjadi,

$$\begin{aligned}\eta(m\Delta x, 2\Delta t) &= \eta((m-1)\Delta x, \Delta t) + \frac{1}{2} [\eta(m\Delta x, \Delta t) - \eta((m-2)\Delta x, \Delta t)] \\ &\quad + \eta((m-1)\Delta x, 2\Delta t) - \eta((m-1)\Delta x, \Delta t)\end{aligned}$$

Jika persamaan diatas kita tuliskan kembali dalam bentuk diskrit, maka diperoleh

$$\eta_m^2 = \eta_{m-1}^1 + \frac{1}{2} (\eta_m^1 - \eta_{m-2}^1) + \eta_{m-1}^2 - \eta_{m-1}^1$$

dengan melakukan pengelompokan suku-suku yang memuat indeks waktu 2 diruas kiri, dan yang lainnya diruas kanan diperoleh

$$-\eta_{m-1}^2 + \eta_m^2 = \eta_{m-1}^1 + \frac{1}{2} (\eta_m^1 - \eta_{m-2}^1) - \eta_{m-1}^1 \quad (4.19)$$

jika kemudian kita substitusikan kondisi awal $\eta_j^1 = \psi_j$ maka diperoleh

$$-\eta_{m-1}^2 + \eta_m^2 = \psi_{m-1} + \frac{1}{2} (\psi_m - \psi_{m-2}) - \psi_{m-1}$$

Sampai disini, kita telah memperoleh 4 buah persamaan baru yang kita bangkitkan menggunakan ekstrapolasi terhadap kondisi batas, yaitu persamaan (4.16), (4.17), (4.18) dan persamaan (4.19). Untuk menentukan nilai-nilai u dan η , kita selesaikan sistem persamaan (4.13) dan (4.14) beserta persamaan-persamaan yang diperoleh dari ekstrapolasi secara simultan sebagai satu buah sistem, yaitu

$$\begin{aligned}u_1^2 + u_2^2 &= \phi_2^1 - \frac{1}{2} (\phi_3^1 - u_1^1) - \phi_2^1 \\ a_1 u_2^2 - a_2 \eta_1^2 + a_2 \eta_3^2 &= a_1 \phi_2 \\ a_1 u_3^2 - a_2 \eta_2^2 + a_2 \eta_4^2 &= a_1 \phi_3 \\ &\vdots \\ a_1 u_{m-1}^2 - a_2 \eta_{m-2}^2 + a_2 \eta_m^2 &= a_1 \phi_{m-1} \\ -u_{m-1}^2 + u_m^2 &= \phi_{m-1} + \frac{1}{2} (\phi_m - \phi_{m-2}) - \phi_{m-1} \\ \eta_1^2 + \eta_2^2 &= \psi_2 - \frac{1}{2} (\psi_3 - \psi_1) - \psi_2 \\ -a_3 u_1^2 + a_3 u_3^2 - a_4 \eta_1^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_2^2 - a_4 \eta_3^2 &= a_1 \psi_2 \\ -a_3 u_2^2 + a_3 u_4^2 - a_4 \eta_2^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_3^2 - a_4 \eta_4^2 &= a_1 \psi_3 \\ &\vdots \\ -a_3 u_{m-2}^2 + a_3 u_m^2 - a_4 \eta_{m-2}^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_{m-1}^2 - a_4 \eta_m^2 &= a_1 \psi_{m-2} \\ -\eta_{m-1}^2 + \eta_m^2 &= \psi_{m-1} + \frac{1}{2} (\psi_m - \psi_{m-2}) - \psi_{m-1}\end{aligned}$$

Variabel-variabel yang tak diketahui pada sistem persamaan diatas adalah $u_1^2, u_2^2, \dots, u_m^2$ dan $\eta_1^2, \eta_2^2, \dots, \eta_m^2$, sedemikian hingga dapat kita tuliskan sebagai sebuah persamaan matriks *square* yang ukuran baris dan kolomnya sama, yaitu $(2m)$. Misalkan

$$\mathbf{w} = \left[u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad \cdots \quad u_{m-1}^2 \quad u_m^2 \quad \eta_1^2 \quad \eta_2^2 \quad \eta_3^2 \quad \cdots \quad \eta_{m-1}^2 \quad \eta_m^2 \right]^t$$

dan

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & -a_4 & a_1 + 2a_4 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -a_4 & a_1 + 2a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 + 2a_4 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{array} \right]$$

serta

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \phi_2 - \frac{1}{2}(\phi_3 - \phi_1) - \phi_2 \\ a_1\phi_2 \\ a_1\phi_3 \\ \vdots \\ a_1\phi_{m-1} \\ \phi_{m-1} + \frac{1}{2}(\phi_m - \phi_{m-2}) - \phi_{m-1} \\ \psi_2 - \frac{1}{2}(\psi_3 - \psi_1) - \psi_2 \\ a_1\psi_2 \\ a_1\psi_3 \\ \vdots \\ a_1\psi_{m-2} \\ \psi_{m-1} + \frac{1}{2}(\psi_m - \psi_{m-2}) - \psi_{m-1} \end{array} \right]$$

maka sistem persamaan tersebut dapat kita tuliskan menjadi sebuah persamaan matriks

$$\mathbf{A}\mathbf{w}^2 = \mathbf{B} \quad (4.20)$$

Ukuran matriks \mathbf{A} , \mathbf{w} , dan \mathbf{B} secara berturut-turut adalah $(2m \times 2m)$, $(2m \times 1)$, dan $(2m \times 1)$.

Sistem persamaan (4.20) dapat diselesaikan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan atau metode-metode penyelesaian sistem persamaan linier yang lainnya. Karena bentuk dari matriks A yang sparse atau banyak memuat elemen nol, maka sistem tersebut akan sangat efektif jika diselesaikan menggunakan metode iterasi Jacobi ataupun metode iterasi Gauss-Seidel. Dalam penelitian ini, untuk menyelesaikan sistem persamaan linier (4.20) akan kita gunakan metode iterasi Gauss-Seidel.

Penyelesaian sistem persamaan (4.20) akan menghasilkan vektor

$$\mathbf{w}^2 = (u_1^2, u_2^2, u_3^2, \dots, u_m^2, \eta_1^2, \eta_2^2, \eta_3^2, \dots, \eta_m^2)^t.$$

Berikutnya untuk menentukan nilai-nilai

$$\mathbf{w}^{n+1} = (u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, u_3^{n+1}, \dots, u_m^{n+1}, \eta_1^{n+1}, \eta_2^{n+1}, \eta_3^{n+1}, \dots, \eta_m^{n+1})^t,$$

dengan $n \in \{2, 3, \dots, p\}$ dimana p adalah banyak titik diskrit untuk waktu t kita gunakan cara yang sama sebagaimana cara memformulasikan sistem persamaan linier untuk menentukan \mathbf{w}^2 . Adapun sistem yang diperoleh secara umum dapat di tuliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_1^{n+1} + u_2^{n+1} &= u_2^n - \frac{1}{2} (u_3^n - u_1^n) - u_2^n \\ a_1 u_2^{n+1} - a_2 \eta_1^{n+1} + a_2 \eta_3^{n+1} &= a_1 u_2^n \\ a_1 u_3^{n+1} - a_2 \eta_2^{n+1} + a_2 \eta_4^{n+1} &= a_1 u_3^n \\ &\vdots \\ a_1 u_{m-1}^{n+1} - a_2 \eta_{m-2}^{n+1} + a_2 \eta_m^{n+1} &= a_1 u_{m-1}^n \\ -u_{m-1}^{n+1} + u_m^{n+1} &= u_{m-1}^n + \frac{1}{2} (u_m^n - u_{m-2}^n) - u_{m-1}^n \\ \eta_1^{n+1} + \eta_2^{n+1} &= \eta_2^n - \frac{1}{2} (\eta_3^n - \eta_1^n) - \eta_2^n \\ -a_3 u_1^{n+1} + a_3 u_3^{n+1} - a_4 \eta_1^{n+1} + (a_1 + 2a_4) \eta_2^{n+1} - a_4 \eta_3^{n+1} &= a_1 \eta_2^n \\ -a_3 u_2^{n+1} + a_3 u_4^{n+1} - a_4 \eta_2^{n+1} + (a_1 + 2a_4) \eta_3^{n+1} - a_4 \eta_4^{n+1} &= a_1 \eta_3^n \\ &\vdots \\ -a_3 u_{m-2}^{n+1} + a_3 u_m^{n+1} - a_4 \eta_{m-2}^{n+1} + (a_1 + 2a_4) \eta_{m-1}^{n+1} - a_4 \eta_m^{n+1} &= a_1 \eta_{m-2}^n \\ -\eta_{m-1}^{n+1} + \eta_m^{n+1} &= \eta_{m-1}^n + \frac{1}{2} (\eta_m^n - \eta_{m-2}^n) - \eta_{m-1}^n \end{aligned}$$

Jika dituliskan dalam bentuk persamaan matriks

$$A\mathbf{w}^{n+1} = B \quad (4.21)$$

maka matrik-matriks yang bersesuaian adalah sebagai berikut:

$$A = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & -a_4 & a_1 + 2a_4 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -a_4 & a_1 + 2a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 + 2a_4 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{w}^{n+1} = \left[u_1^{n+1} \quad u_2^{n+1} \quad u_3^{n+1} \quad \cdots \quad u_{m-1}^{n+1} \quad u_m^{n+1} \quad \eta_1^{n+1} \quad \eta_2^{n+1} \quad \eta_3^{n+1} \quad \cdots \quad \eta_{m-1}^{n+1} \quad \eta_m^{n+1} \right]^t$$

$$B = \left[\begin{array}{c} u_2^n - \frac{1}{2} (u_3^n - u_1^n) - u_2^n \\ a_1 u_2^n \\ a_1 u_3^n \\ \vdots \\ a_1 u_{m-1}^n \\ u_{m-1}^n + \frac{1}{2} (u_m^n - u_{m-2}^n) - u_{m-1}^n \\ \eta_2^n - \frac{1}{2} (\eta_3^n - \eta_1^n) - \eta_2^n \\ a_1 \eta_2^n \\ a_1 \eta_3^n \\ \vdots \\ a_1 \eta_{m-2}^n \\ \eta_{m-1}^n + \frac{1}{2} (\eta_m^n - \eta_{m-2}^n) - \eta_{m-1}^n \end{array} \right]$$

Untuk menyelesaikan persamaan SWE di atas secara keseluruhan akan digunakan bantuan software Matlab sebagai alat perhitungan, adapun kode program yang dibuat berdasarkan langkah-langkah penyelesaian diatas dapat dilihat pada algoritma 1 berikut:

4.3 Percobaan Numerik

Untuk melakukan simulasi numerik, diperlukan kondisi batas di kiri sebagai input, dan kondisi batas di kanan sebagai output yang menyatakan situasi fisis dari perjalanan gelombang,

dapat berupa penyerapan atau pemantulan. Kondisi batas serap dapat diformulasikan menggunakan ekstrapolasi linier, dan pemantulan pada kondisi batas dapat dinyatakan dengan memberikan suatu nilai pada η dan nilai negatif dari u yang berasal dari indeks sebelumnya. Untuk mensimulasikan situasi fisis, domain- x kita bagi menjadi 3 sub bagian, yaitu bagian pertama sebelum 0 atau $x < 0$ menyatakan situasi aliran air sebelum melalui pemecah gelombang, bagian kedua adalah $0 < x < L$, menyatakan situasi dimana pemecah gelombang berada, dan bagian ketiga $x > 0$ menyatakan situasi setelah gelombang melalui pemecah gelombang.

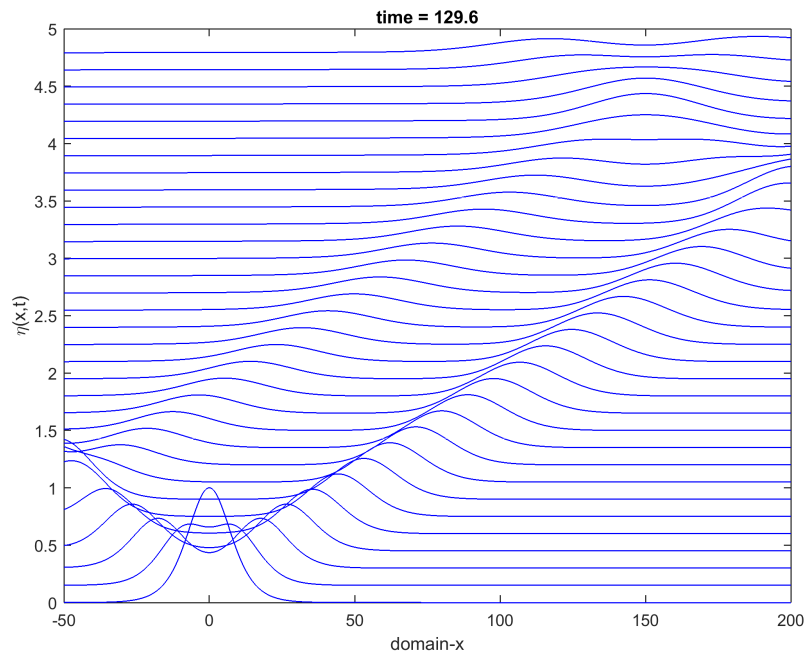
Prosedur numerik yang dijelaskan pada subbab sebelumnya digunakan untuk mengamati perambatan gelombang melalui sebuah pemecah gelombang terendam. Karena kita bekerja pada model yang variabel-variabelnya berdimensi, kita gunakan gravitasi $g = 10$. Untuk perhitungan kita gunakan $\Delta x = 0.2$, dan berbagai variasi kedalaman air d , serta kedalaman air diatas permukaan pemecah gelombang h , konduktivitas hidrolik k dan pemecah gelombang di letakkan pada $0 < x < L$.

Untuk kondisi awal kita gunakan dua macam model gelombang, yaitu gelombang soliter yang akan kita bangkitkan menggunakan fungsi secant hiperbolik, dan gelombang sinusoidal yang akan kita bangkitkan menggunakan fungsi cosinus. Pada gambar 4.1, kita tunjukkan perambatan gelombang melalui pemecah gelombang berpori. Untuk menunjukkan simulasi, kita menggambar permukaan gelombang pada beberapa nilai t . Gelombang sinusoidal datang dari kiri, berjalan melalui dasar rata dengan kedalaman $d = 1.5$ dan melalui pemecah gelombang dengan tinggi 0.5 dari dasar saluran, dengan $k = 0.3$, diletakkan pada interval $[0, 50]$. Diatas pemecah gelombang berpori, gelombang berubah ketinggiannya dan amplitudonya berkurang serta menjadi gelombang yang serupa dengan bentuk sinusoidal. Melalui pemecah gelombang dengan panjang gelombang yang sama yaitu $\lambda = 39.4$ sebagai gelombang datang. Amplitudo gelombang sebelum dan sesudah melalui pemecah gelombang dapat dilihat pada gambar 4.1 berikut.

Secara numerik kita dapat menghitung besarnya penurunan amplitudo gelombang dari 0.15 menjadi 0.0959. Untuk itu, kita dapat menghitung besarnya energi yang berkurang relatif terhadap kuadrat amplitudo gelombang seperti pada (Yu & Mei, 2000). Pemecah gelombang menghilangkan energi sebesar 59% dari energi gelombang transmisi. Untuk L yang lebih panjang, kita memperoleh gelombang dengan amplitudo yang lebih kecil setelah melalui pemecah gelombang. Ini berbeda dengan pemecah gelombang yang solid atau tidak berpori, yang mana kita dapat menentukan panjang pemecah gelombang optimal, yang dapat meminimumkan amplitudo gelombang datang atau gelombang transmisi, lihat (Mei, 1989) dan juga (L. H. Wiryanto, 2010).

Suku η_{xx} pada persamaan SWE (4.2) menyerap dan menurunkan amplitudo gelombang, adapun kekuatan suku tersebut dalam menurunkan amplitudo bergantung pada koefisien k

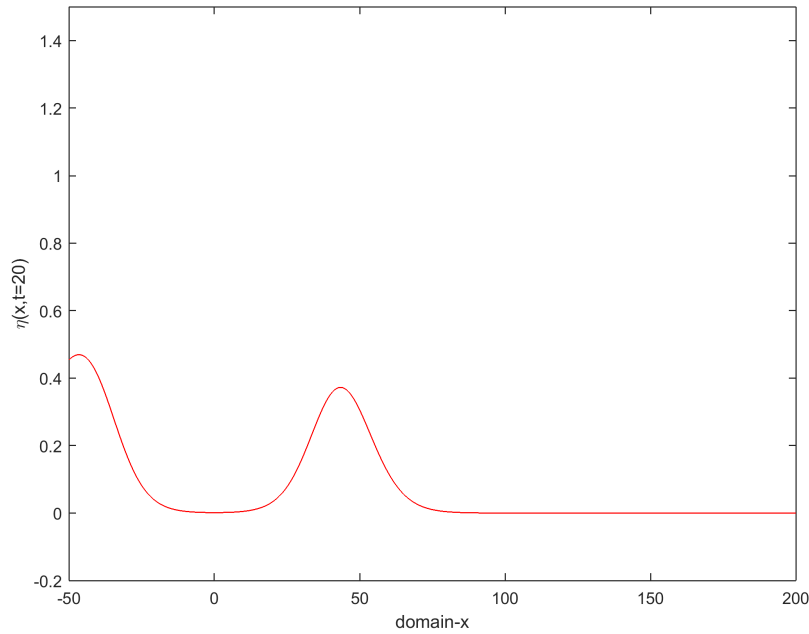
dan $d - h$. Kita tunjukkan pada gambar 4.2, plot dari permukaan gelombang $\eta(x, 20)$ untuk $k = 0.3$ dan $k = 0.5$. Kita menghitung gelombang datang yang berbentuk sinusoidal yang merambat melalui pemecah gelombang berpori dengan panjang pemecah gelombang $L = 100$ dan tinggi $d - h = 0.5$. pada daerah $x > 100$, gelombang menjadi seperti sinusoidal, karena mereka dihitung dari persamaan air-dangkal linier. Penurunan amplitudo gelombang, diatas pemecah gelombang berpori, sesuai dengan solusi analitik dari gelombang monokromatik pada (L. Wiryanto & Anwarus, 2009). Gelombang yang merambat diatas pemecah gelombang berpori menurunkan amplitudo secara exponential terhadap x . Untuk itu, keberadaan pemecah gelombang berpori tersebut juga mengurangi energi gelombang. Untuk beberapa nilai L dan $(d - h)k$, kita dapat menghitung besarnya energi yang hilang karena pemecah gelombang berpori. Pada gambar 4, kita plot persentase dari berkurangnya energi gelombang terhadap $(d - h)k$ dengan panjang pemecah gelombang sebesar $L = 50, 60$, dan 80 . Kita gunakan $(d - h)k$, sebagai sumbu horizontal, karena ketinggian dan konduktivitas hidrolis dari pemecah gelombang terjadi sebagai salah satu koefisien dari η_{xx} pada persamaan (4.2).



Gambar 4.1: Plot perambatan gelombang melalui pemecah gelombang berpori yang terletak pada daerah $0 < x < L$, $L = 50$

Selanjutnya untuk $t = 20$, dapat kita lihat hasilnya sebagai berikut

Untuk gelombang datang lainnya, seperti gelombang soliter, perambatan gelombang tersebut dapat di observasi secara numerik dari model (21). Ketika digunakan fungsi secan hiperbolik sebagai gelombang datang, kita memperoleh hasil yang menyerupai gelombang monokromatik. Kita dapat mengamati perubahan bentuk gelombang tersebut setelah melalui pemecah



Gambar 4.2: Plot dari $\eta(x, 20)$

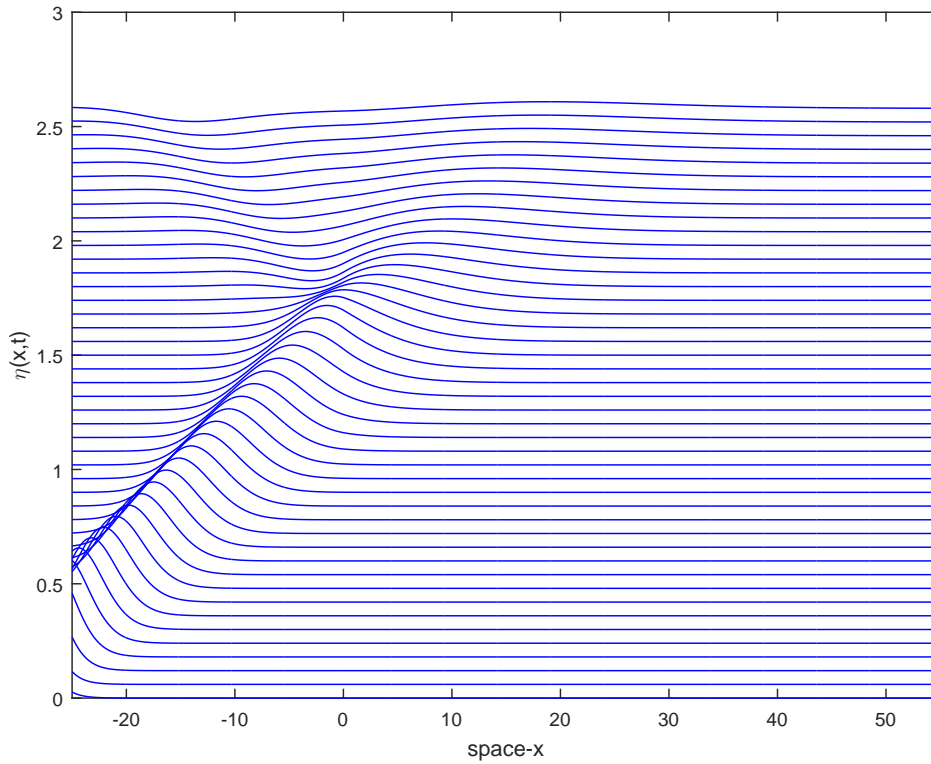
gelombang berpori yang menyebarkan gelombang dan menurunkan amplitudonya, seperti pada gambar 5a.

Karena kita meletakkan pemecah gelombang pada dasar saluran yang rata, perubahan kedalaman air menyebabkan sebagian gelombang dipantulkan. Pemantulan terjadi ketika gelombang memasuki daerah dimana pemecah gelombang berpori berada, karena kedalaman air berubah dari d menjadi $d - h$. Pemantulan gelombang kedua dengan amplitudo yang lebih kecil berjalan dibelakang pantulan gelombang yang pertama. Itu terjadi setelah perubahan kedalaman air yang kedua dari $d - h$ menjadi d .

Proses pemantulan gelombang ini juga terjadi dan dapat diamati pada gambar 2, tetapi gelombang pantulnya berinteraksi dengan gelombang datang. Hal ini ditunjukkan oleh adanya sedikit kenaikan dan penurunan dari amplitudo gelombang datang. Untuk mengamati pantulan gelombang tersebut, kita menggunakan gelombang soliter sebagai gelombang datang pada batas kiri, sedemikian hingga ketika gelombangnya melewati pemecah gelombang, gelombang pantulnya dapat dilihat berjalan ke kiri tanpa berinteraksi dengan gelombang lainnya pada Gambar 5a. Kita juga menunjukkan profil permukaan gelombang pada $t = 24$ pada gambar 5b, menghasilkan gelombang transmisi dalam sakala yang sesuai. Pemecah gelombang memiliki panjang $L = 70$; dan $k = 0.3$, $d - h = 0.7$.

4.4 Simulasi 1

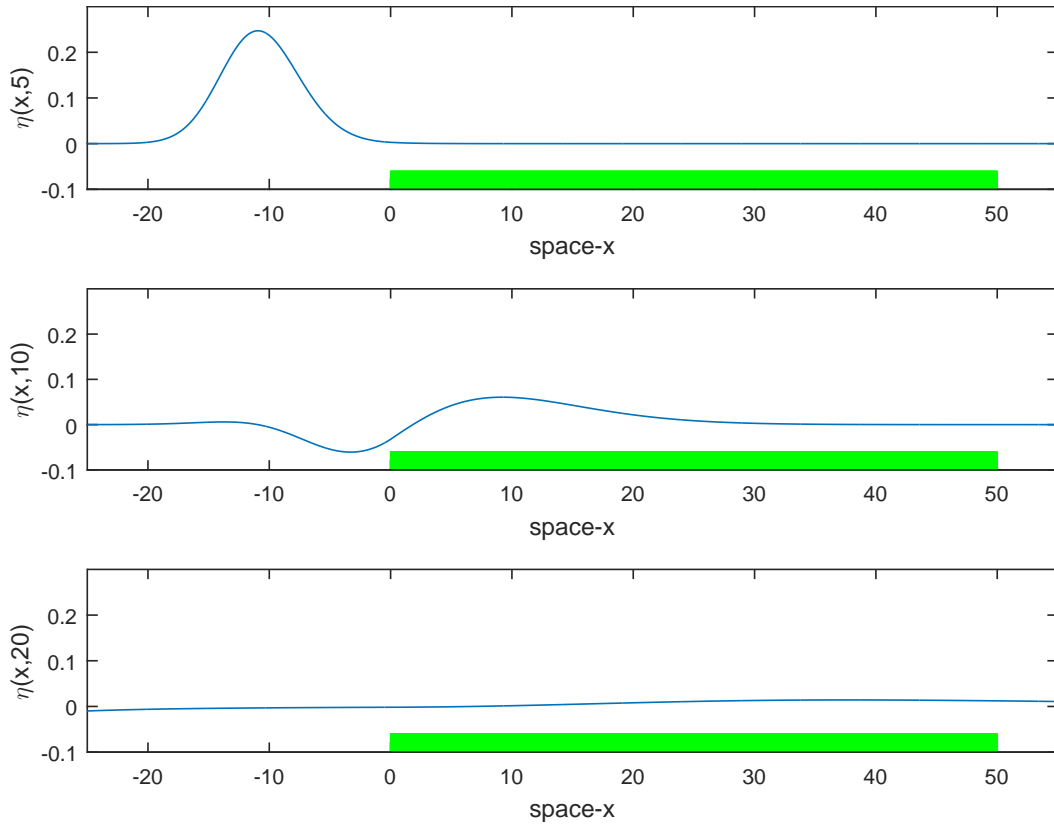
Pada simulasi ini parameter-parameter yang digunakan adalah $g = 10$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, kedalaman air dinyatakan sebagai $d = 1.5$, kedalaman air diatas permukaan pemecah gelombang dinyatakan sebagai $h = 0.5$, konduktivitas hidrolis $k = 0.3$, sedangkan pemecah gelombang berporinya di letakkan pada domain ruang $0 < x < 50$. Kondisi awal yang digunakan berupa gelombang soliter yang datang dari arah kiri dengan amplitudo sebesar 0.5. Pengamatan dilakukan terhadap ketinggian permukaan gelombang sebelum melalui pemecah gelombang dan setelah melalui pemecah gelombang. Perubahan ketinggian permukaan gelombang seiring dengan perjalanan waktu yang diberikan dapat dilihat pada gambar 1 berikut ini



Gambar 4.3: Solusi η untuk seluruh ruang (x) dan waktu (t)

Setelah melalui pemecah gelombang pada $x = 0$, sebagian gelombang transmisi ada yang di pantulkan kembali dan ada yang diteruskan melalui pemecah gelombang. Selain itu, sebagian besar gelombang transmisinya diserap oleh pemecah gelombang berporinya. Setelah melalui pemecah gelombang di $x = 50$ ada sedikit gelombang yang dipantulkan kembali melawan gelombang transmisi. Hal tersebut dapat dilihat pada gambar berikut:

Sebelum memaasuki daerah dimana pemecah gelombang berada yaitu pada saat $t = 5$, ketinggian permukaan gelombang atau amplitudo gelombangnya sebesar $A = 0.2471$. Pada saat memasuki daerah dimana pemecah gelombang berada (lihat gambar 2b) sebagian gelombang



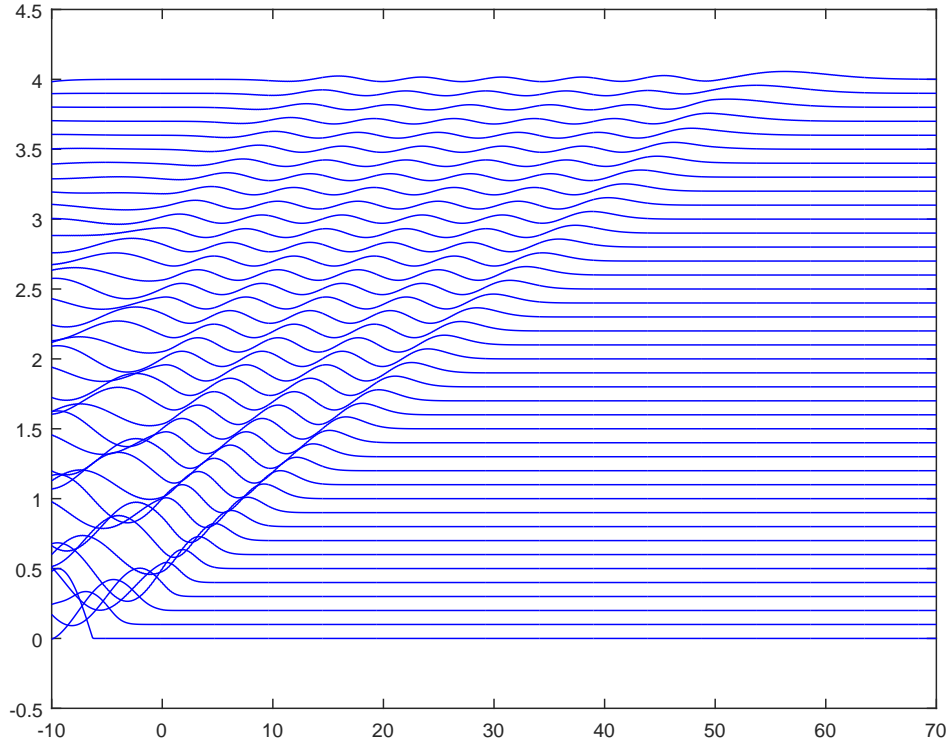
Gambar 4.4: Perjalanan gelombang a) sebelum memasuki pemecah gelombang, b) pada saat berada diatas pemecah gelombang, c) setelah melalui pemecah gelombang

dipantulkan melawan arah gelombang transmisi, dan yang lainnya terus berjalan searah dengan gelombang transmisi dengan amplitudo yang semakin lama semakin berkurang. Setelah melalui daerah pemecah gelombang (pada $t = 20$) amplitudo gelombang transimi berkurang sebesar 94.2% menjadi $A = 0.0576$.

4.5 Simulasi 2

Pada simulasi ini parameter-parameter yang digunakan adalah $g = 10$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, kedalaman air dinyatakan sebagai $d = 1.5$, kedalaman air diatas permukaan pemecah gelombang dinyatakan sebagai $h = 0.5$, konduktivitas hidrolis $k = 0.3$, sedangkan pemecah gelombang berporinya di letakkan pada domain ruang $0 < x < 50$. Kondisi awal yang digunakan berupa gelombang sinusoidal yang datang dari arah kiri dengan amplitudo sebesar 0.5. Pengamatan dilakukan terhadap ketinggian permukaan gelombang sebelum melalui pemecah gelombang dan setelah melalui pemecah gelombang. Perubahan ketinggian permukaan gelombang seiring dengan perjalanan waktu yang diberikan dapat dilihat pada gambar 1 berikut ini

Setelah melalui pemecah gelombang pada $x = 0$, sebagian gelombang transmisi ada yang



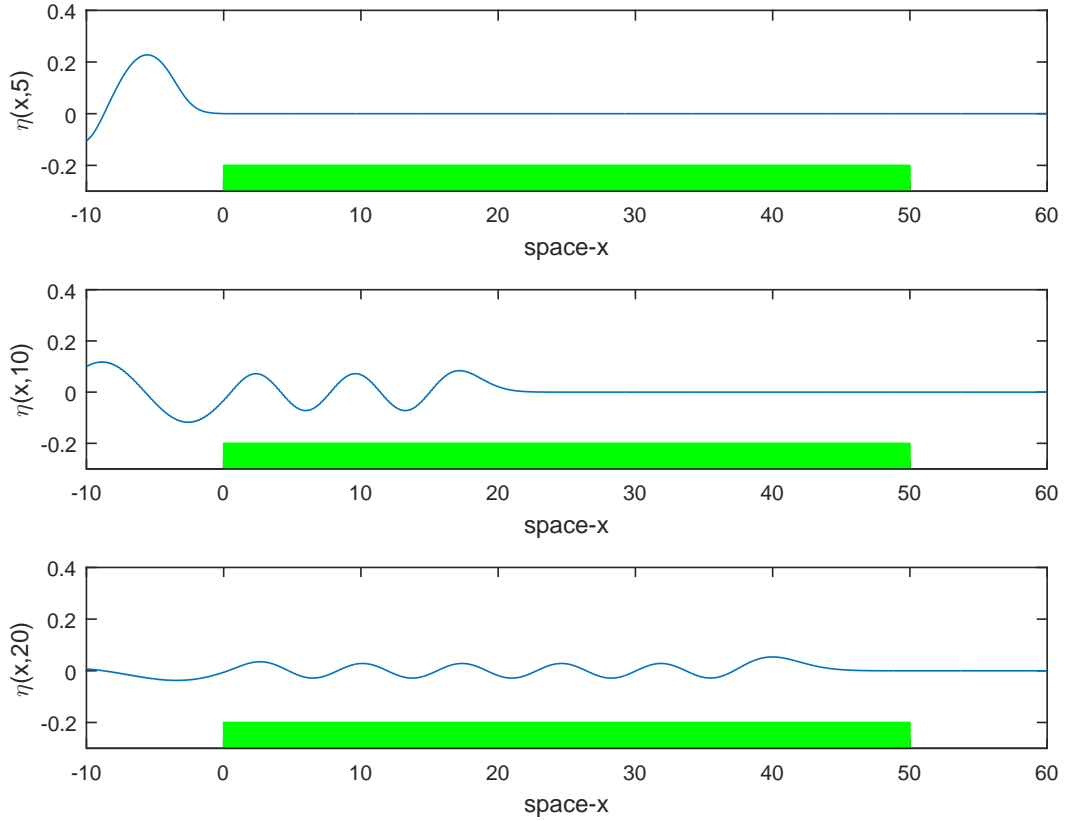
Gambar 4.5: Solusi η untuk seluruh ruang (x) dan waktu (t)

di pantulkan kembali dan ada yang diteruskan melalui pemecah gelombang. Selain itu, sebagian besar gelombang transmisinya diserap oleh pemecah gelombang berporinya. Setelah melalui pemecah gelombang di $x = 50$ ada sedikit gelombang yang dipantulkan kembali melawan gelombang transmisi. Hal tersebut dapat dilihat pada gambar berikut:

Sebelum memasuki daerah dimana pemecah gelombang berada yaitu pada saat $t = 1$, ketinggian permukaan gelombang atau amplitudo gelombangnya sebesar $A = 0.22770.2277$. Pada saat memasuki daerah dimana pemecah gelombang berada (lihat gambar 2b) sebagian gelombang dipantulkan melawan arah gelombang transmisi, dan yang lainnya terus berjalan searah dengan gelombang transmisi dengan amplitudo yang semakin lama semakin berkurang. Setelah melalui daerah pemecah gelombang (pada $t = 20$) amplitudo gelombang transimi berkurang sebesar 92% menjadi $A = 0.0537$.

4.6 Error Information

Untuk mengetahui performansi dari metode beda hingga implisit, kita menggunakan error hampiran (ϵ) berdasarkan norm dari nilai $\|\eta^{n+1} - \eta^n\|$ serta error relatif hampiran (μ) menggunakan formula



Gambar 4.6: Perjalanan gelombang a) sebelum memasuki pemecah gelombang, b) pada saat berada diatas pemecah gelombang, c) setelah melalui pemecah gelombang

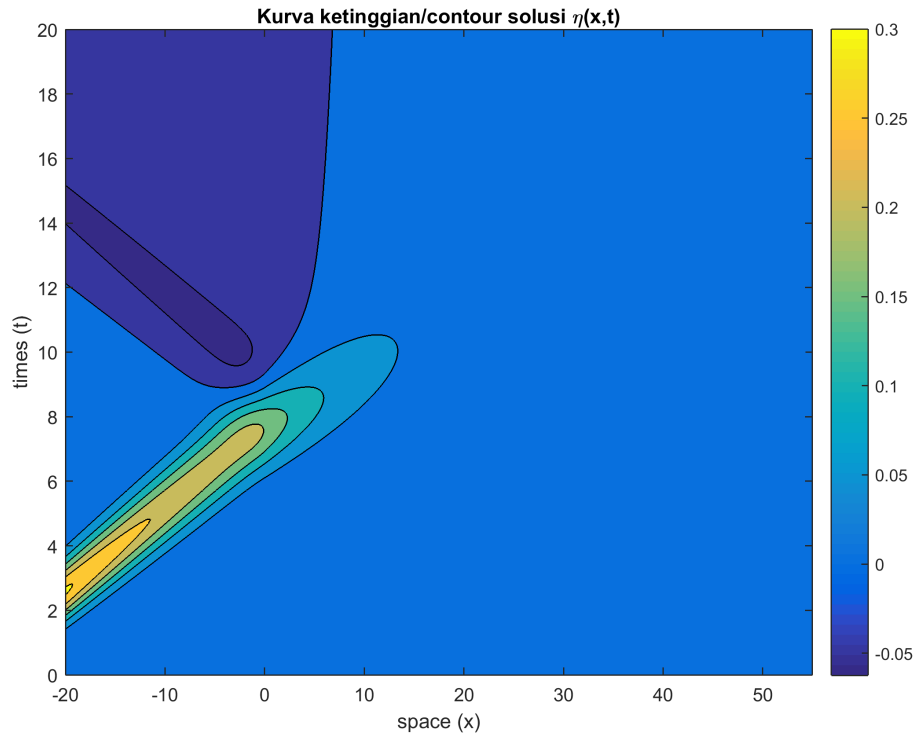
$$\mu = \frac{\epsilon}{\|\eta^{n+1}\|}$$

dengan $n = 1, 2, \dots, (p - 1)$ yang mana p didefinisikan sebagai banyaknya titik diskrit untuk waktu (t). Error hampiran beserta error relatif yang diperoleh dari perhitungan disajikan dalam bentuk grafik sebagaimana pada gambar 3.

Dari gambar 3, dapat dilihat bahwa baik error hampiran, maupun error relatifnya sudah cukup kecil yaitu $\max(\epsilon) = 0.2210$ dan $\max(\mu) = 0.3074$. Seiring berjalannya waktu error hampiran dan error relatifnya semakin kecil. Hal tersebut menunjukkan bahwa metode yang digunakan dapat menghasilkan solusi yang sangat baik, yang ditandai oleh error relatif untuk setiap perulangan kurang dari 1.

Sedangkan untuk simulasi 2, yaitu dengan mengenakan gelombang sinusoidal sebagai gelombang datang, error mutlak dan error relatif yang diperoleh dapat diamati pada gambar 4 berikut.

Dari gambar 4.10, dapat dilihat bahwa baik error hampiran, maupun error relatifnya sudah cukup kecil yaitu $\max(\epsilon) = 0.1910$ dan $\max(\mu) = 0.1204$. Seiring berjalannya waktu error hampiran dan error relatifnya semakin kecil. Hal tersebut menunjukkan bahwa metode yang



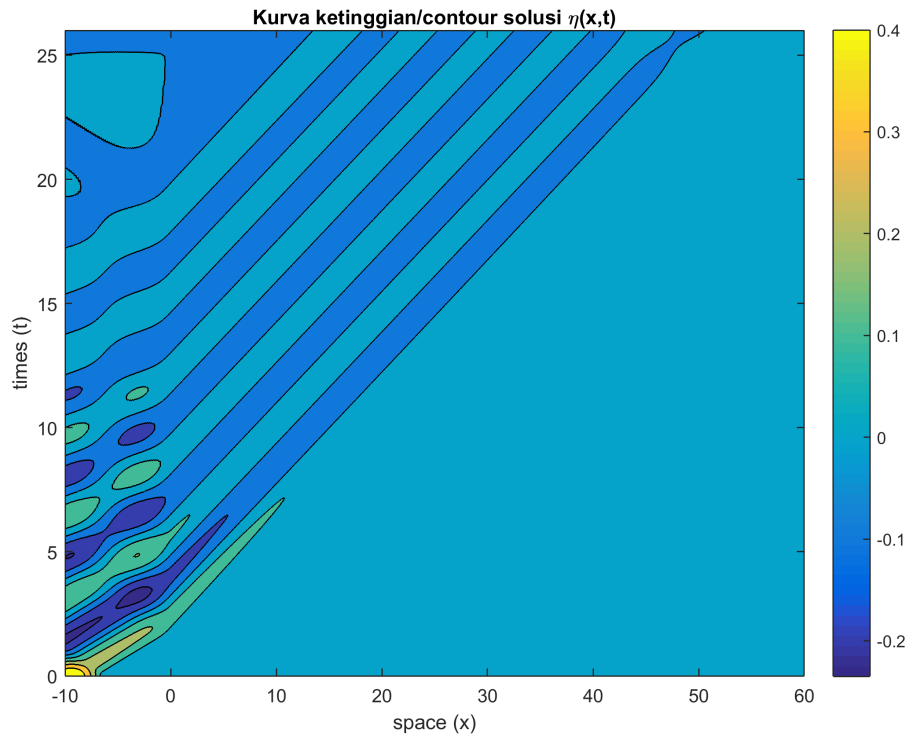
Gambar 4.7: Perjalanan gelombang a) sebelum memasuki pemecah gelombang, b) pada saat berada diatas pemecah gelombang, c) setelah melalui pemecah gelombang

digunakan dapat menghasilkan solusi yang sangat baik, yang ditandai oleh error relatif untuk setiap perulangan kurang dari 1.

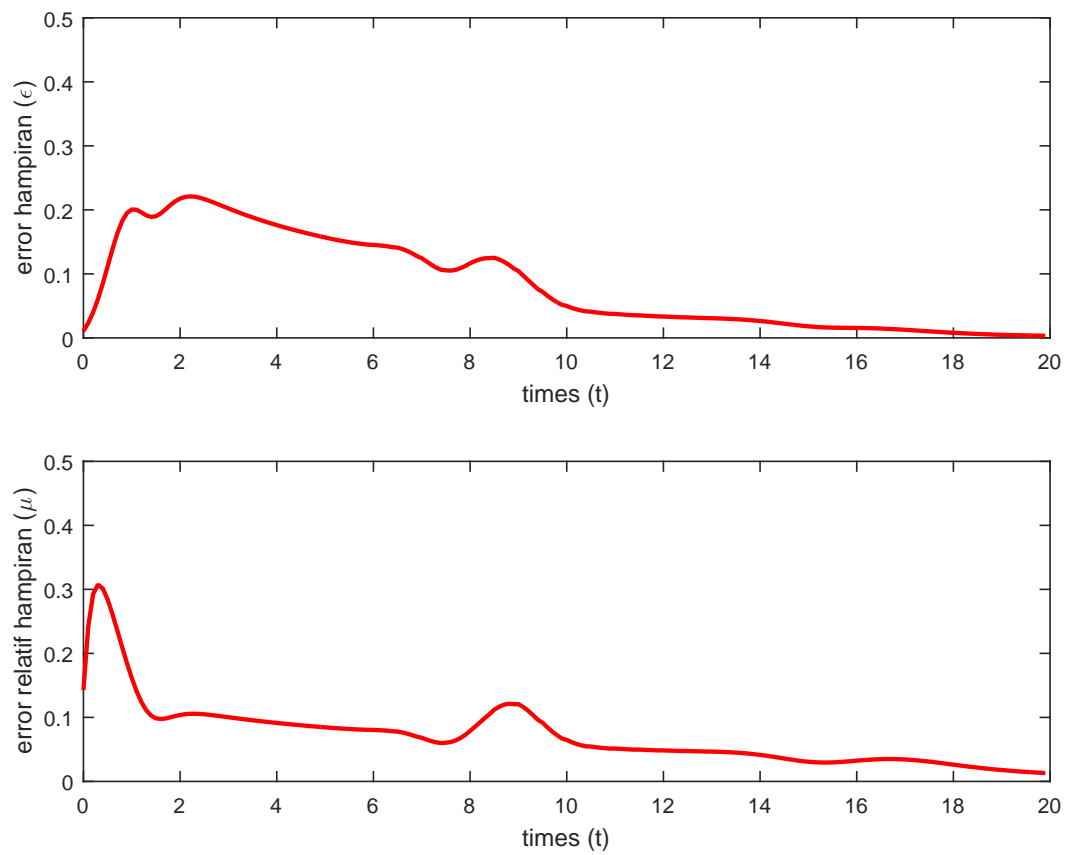
Jika digunakan error maksimum sebagai kriteria pengukuran error, maka error hampiran yang diperoleh untuk seluruh indeks waktu (n) lebih kecil sekitar sepertiga dari error norm. dapat dilihat pada gambar berikut:

Gambar 4.11 adalah maksimum error absolut untuk η^n , $n = 1, 2, \dots, N$ yang diperoleh dari simulasi 1, yaitu jika gelombang datang yang digunakan berupa gelombang soliter. Sedangkan pada Gambar 4.12 menyatakan maksimum error absolut dari η^n , $n = 1, 2, \dots, N$ jika gelombang datang yang digunakan berupa gelombang sinusoidal.

Dari beberapa simulasi yang telah dilakukan diatas, dapat diketahui bahwa metode beda hingga implisit dapat menghasilkan solusi hampiran yang sangat baik untuk penyelesaian masalah sistem persamaan diferensial parsial, atau secara lebih khususnya dalam penelitian ini persamaan gelombang air dangkal (SWE).



Gambar 4.8: Perjalanan gelombang a) sebelum memasuki pemecah gelombang, b) pada saat berada diatas pemecah gelombang, c) setelah melalui pemecah gelombang



Gambar 4.9: Estimasi Error

Algorithm 4.1 Solusi SWE dengan beda-hingga implisit

```
clc
clear
figure(1),clf
g = 10;
d = 1.5;
dx = 0.1;
dt = dx/sqrt(g*d);
dt = 0.1
x = -20:dx:80;
t = 0:dt:50;
dx = x(2)-x(1);
m = length(x);
p = length(t);
u = zeros(m,p);
eta = zeros(m,p);
eta(:,1) = 1*sech(x).^2;
u(:,1) = 1*sech(x).^2;
plot(x,eta(:,1),'b')
xlim([x(1) x(m)])
hold on
pause(0.01)
for j=1:m
    if and(x(j)>0,x(j)<50)
        h(j)=0.5;
    else
        h(j)=1.5;
    end
end
k = 0.3;
a1 = 1/dt;
a2 = g/(2*dx);
k = 0;
for n=1:p-1
    G = zeros(m);
    G(1,1) = 1;
    G(1,2) = -1;
    r(1,1) = -(1/2)*(u(3,n)-u(1,n));
    for j=2:m-1
        a3 = h(j)/(2*dx);
        a4 = (d-h(j))*k/dx^2;
        G(j,j) = a1;
        G(j,j+m-1) = -a2;
        G(j,j+m+1) = a2;
        r(j,1) = a1*u(j,n);
    end
    ...
end
```

Algorithm 4.2 Solusi SWE dengan beda-hingga implisit (lanjutan.)

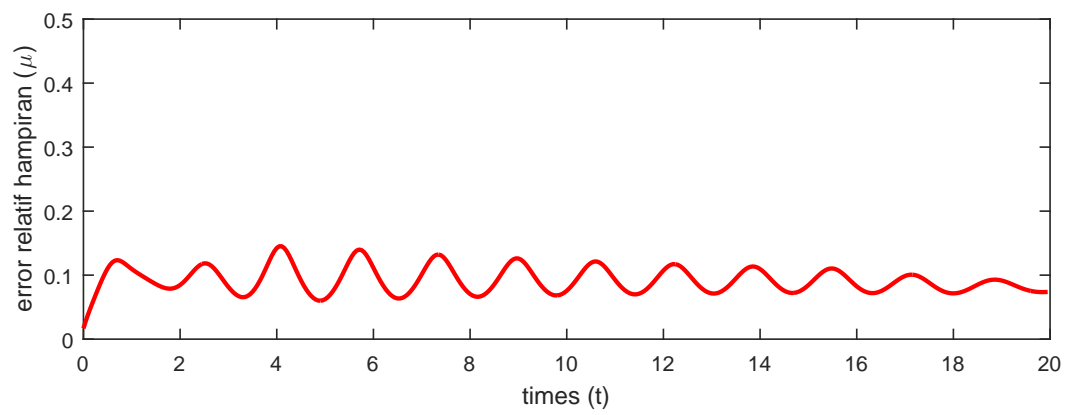
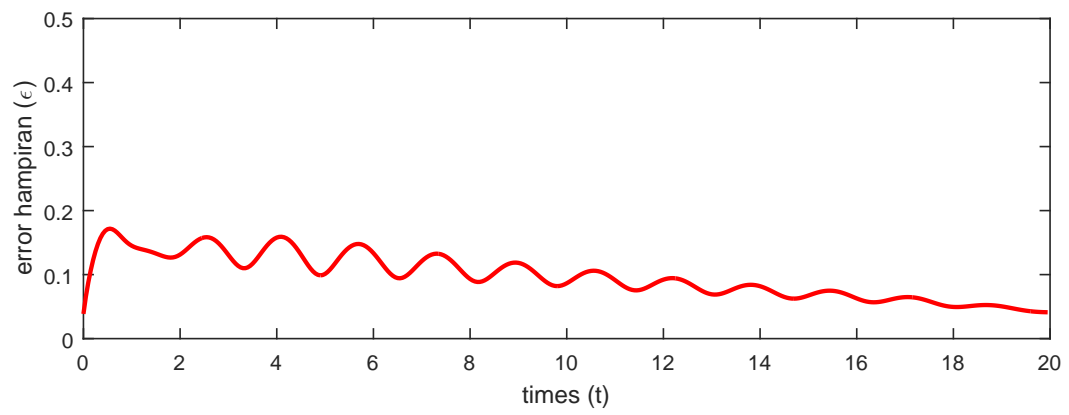
```
G(m,m-1) = -1;
G(m,m) = 1;
r(m,1) = (1/2)*(u(m,n)-u(m-2,n));
F = zeros(m);
F(1,m+1) = 1;
F(1,m+2) = -1;
s(1,1) = -(1/2)*(eta(3,n)-eta(1,n));
for j=2:m-1
    a3 = h(j)/(2*dx);
    a4 = (d-h(j))*k/dx^2;
    F(j,j-1) = -a3;
    F(j,j+1) = a3;
    F(j,j+m-1) = -a4;
    F(j,j+m) = a1+2*a4;
    F(j,j+m+1) = -a4;
s(j,1) = a1*eta(j,n);
end
F(m,m+m-1) = -1;
F(m,m+m) = 1;
s(m,1) = (1/2)*(eta(m,n)-eta(m-2,n));
A = [G;F];
B = [r;s];
w = A\B;
u(:,n+1) = w(1:m);
eta(:,n+1) = w(m+1:2*m);
if mod(n,10)==0
    k = k+1;
    plot(x,eta(:,n+1)+k*0.01,'b')
    xlim([x(1) x(m)])
    pause(0.1)
end
end
```

Algorithm 4.3 Pseude code untuk kondisi awal berupa gelombang sinusoidal

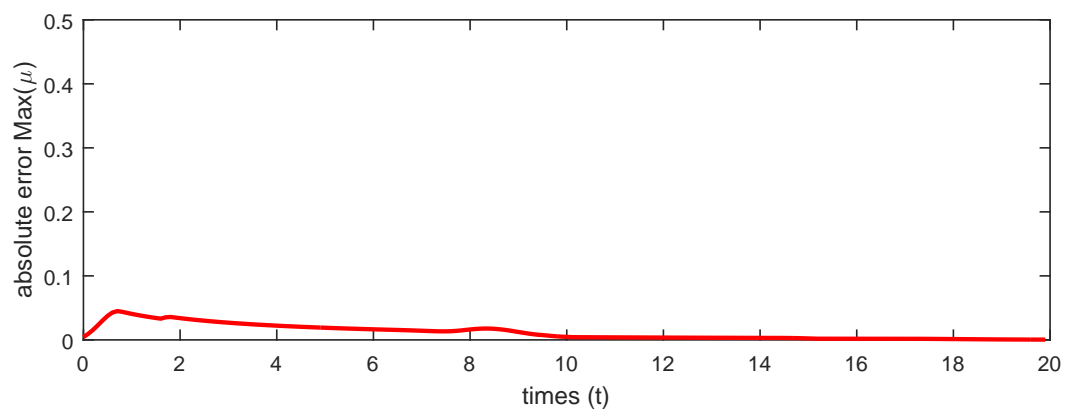
```
clc,clear
%simulasi 2 % dengan menggunakan h tidak konstan
figure(1),clf
g = 10;
d = 1.5;
dx = 0.1;
dt = 0.05;
x = -100:dx:80;
t = 0:dt:30;
m = length(x);
p = length(t);
u = zeros(m,p);
eta = zeros(m,p);
for j=1:m
    if and(x(j)>=-25*pi,x(j)<=-2*pi)
        eta(j,1) = 0.5*sin(0.5*x(j));
    else
        eta(j,1) = 0;
    end
end
plot(x,eta(:,1),'b')
ylim([-1 2])
pause(0.01)
hold on
for j=1:m
    if and(x(j)>0,x(j)<50)
        h(j)=0.5;
    else
        h(j)=1.5;
    end
end
k = 0.3;
a1 = 1/dt;
a2 = g/(2*dx);
k = 0;
for n=1:p-1
    G = zeros(m);
    G(1,1) = 1;
    G(1,2) = -1;
    r(1,1) = -(1/2)*(u(3,n)-u(1,n));
    for j=2:m-1
        a3 = h(j)/(2*dx);
        a4 = (d-h(j))*k/dx^2;
        G(j,j) = a1;
        G(j,j+m-1) = -a2;
        G(j,j+m+1) = a2;
        r(j,1) = a1*u(j,n);
    end
    ...
end
```

Algorithm 4.4 Pseude code untuk kondisi awal berupa gelombang sinusoidal (lanjutan.)

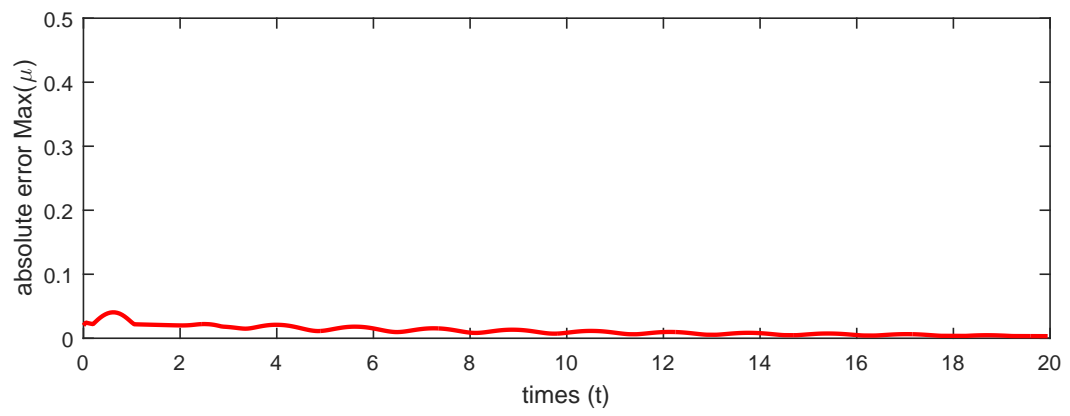
```
G(m,m-1) = -1;
G(m,m) = 1;
r(m,1) = (1/2)*(u(m,n)-u(m-2,n));
F = zeros(m);
F(1,m+1) = 1;
F(1,m+2) = -1;
s(1,1) = -(1/2)*(eta(3,n)-eta(1,n));
for j=2:m-1
    a3 = h(j)/(2*dx);
    a4 = (d-h(j))*k/dx^2;
    F(j,j-1) = -a3;
    F(j,j+1) = a3;
    F(j,j+m-1) = -a4;
    F(j,j+m) = a1+2*a4;
    F(j,j+m+1) = -a4;
    s(j,1) = a1*eta(j,n);
end
F(m,m+m-1) = -1;
F(m,m+m) = 1;
s(m,1) = (1/2)*(eta(m,n)-eta(m-2,n));
A = [G;F];
B = [r;s];
w = A\B;
u(:,n+1) = w(1:m);
eta(:,n+1) = w(m+1:2*m);
plot(x,eta(:,n+1),'b')
ylim([-1 2])
pause(0.01)
if mod(n,5)==0
    k = k+1;
    plot(x,eta(:,n+1)+k*0.1,'b')
    xlim([x(1) x(m)])
    pause(0.01)
end
end
end
```



Gambar 4.10: Estimasi Error



Gambar 4.11: Estimasi Error



Gambar 4.12: Estimasi Error

BAB V

Kesimpulan

Kita telah menyelesaikan persamaan air-dangkal satu dimensi menggunakan metode beda-hingga implisit. Model tersebut menjelaskan perambatan gelombang melalui sebuah pemecah gelombang berpori, yang mana setelah melalui pemecah gelombang tersebut, amplitudo gelombang berkurang serta energi-nya juga berkurang. Energi yang dibawa oleh gelombang juga berkurang, secara proporsional terhadap kuadrat dari amplitudo. Pelemahan gelombang tergantung pada dari kuantitas pemecah gelombangnya, konduktivitas hidrolik k dan ketinggian pemecah gelombang $d - h$, karena konduktivitas hidrolik dan ketinggian gelombang muncul sebagai koefisien dari suku pengurang atau penyerap.

Panjang L dari pemecah gelombang berporinya juga mengakibatkan penurunan amplitudo, karena suku dampingnya memuat turunan kedua terhadap ruang, sehingga panjang optimal dari pemecah gelombang tidak ada berlawanan dengan pemecah gelombang yang solid atau tidak berpori. Dalam mengamati model, kita menggunakan gelombang monikromatik dan gelombang sinusidal sebagai gelombang datang, dan perambatannya telah kami hitung sebagaimana berkurangnya amplitudo dan energi gelombang tersebut. Kita juga menemukan fakta bahwa ada pemantulan gelombang yang terjadi setelah gelombang transmisinya mengenai pemecah gelombangnya.

References

- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (1998). Numerical methods for engineers.
- Jamhuri, M., & Alisah, E. (2015). *Evolusi Gelombang Harmonik melalui Serangkaian Balok Berpori*. Available from <https://j4m3sh.wordpress.com/>
- Jamhuri, M., Kusumastuti, A., & Suharleni, F. (2013). *Evolusi Gelombang Harmonik Melalui Balok Berpori* (Tech. Rep.). Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim.
- Mei, C. C. (1989). *The applied dynamics of ocean surface waves* (Vol. 1). World scientific.
- Mizumura, K. (1998). Free surface flow over permeable wavy bed. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(9), 955–962.
- Pudjaprasetya, S. R., & Chendra, H. D. (2009). An optimal dimension of submerged parallel bars as a wave reflector. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 32(1).
- Tsai, C.-P., Chen, H.-B., & Lee, F.-C. (2006). Wave transformation over submerged permeable breakwater on porous bottom. *Ocean engineering*, 33(11), 1623–1643.
- Wiryanto, L., & Anwarus, S. (2009). Monochromatic waves over permeable bed. In *Proceedings of 5th asian mathematical conference* (pp. 617–622). Kuala Lumpur, Malaysia.
- Wiryanto, L. H. (2010). Wave propagation over a submerged bar. *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*, 42(2), 81–90.
- Wiryanto, L. H. (2011). Wave propagation passing over a submerged porous breakwater. *Journal of Engineering Mathematics*, 70(1-3), 129–136.
- Wiryanto, L. H., & Jamhuri, M. (2014). Monochromatic Wave over One and Two Bars. *Applied Mathematical Sciences*, 8(61), 3017–3025.
- Yu, J., & Mei, C. C. (2000). Do longshore bars shelter the shore? *Journal of Fluid Mechanics*, 404, 251–268.
- Zhu, S., Yuan, G., & Sun, W. (2004). Convergence and stability of explicit/implicit schemes for parabolic equations with discontinuous coefficients. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 1(2), 131–146.

JADWAL SEMINAR HASIL PENELITIAN
LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN MASYARAKAT
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG

Judul : Solusi Numerik Persamaan Air Dangkal pada Masalah Perambatan
 Penelitian Gelombang melalui Media Berpori
 Hari/Tanggal : Kamis, 14 Juli 2016
 Tempat : Ruang Meeting Jurusan Matematika

Waktu	Kegiatan	Narasumber
09.00-12.00 WIB	Konstruksi Model Matematika pada Masalah Perambatan Gelombang melalui Balok Berpori	Mohammad Jamhuri, M.Si
12.00-13.00 WIB	Ishoma	
13.00-16.00 WIB	Analisis Error dan Solusi Numerik Persamaan Air Dangkal (SWE)	Mohammad Jamhuri, M.Si

Ketua Tim Peneliti

Mohammad Jamhuri, M.Si
 NIP. 198105022005011004

SURAT UNDANGAN

Nomor : -
Lampiran : 1 Lembar
Perihal : Undangan Seminar Hasil Penelitian

Kepada Yth.

Bapak/Ibu/Sdr/i

Mengharap dengan hormat kehadiran Bapak/Ibu pada Seminar Hasil Penelitian LP2M yang akan dilaksanakan pada:

Hari/Tanggal : Kamis, 16 Juli 2016
Pukul : 09.00-16.00 WIB
Tempat : Ruang Meeting Jurusan Matematika

yang akan disajikan oleh:

Nama Peneliti : Mohammad Jamhuri, M.Si
Program Studi : Matematika
Judul : Solusi Numerik Persamaan Air Dangkal pada Masalah Perambatan
Penelitian Gelombang melalui Media Berpori

Demikian undangan ini kami sampaikan, atas perhatian dan kehadiran Bapak/Ibu/Sdr/i kami ucapkan terima kasih.

Malang, 11 Juli 2016
Ketua Peneliti

Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 198105022005011004

Lampiran-1:

Curriculum Vitae

Identitas Diri

Nama	:	Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP	:	19810502 200501 1 004
Jenis Kelamin	:	Laki-Laki
Tempat dan Tanggal Lahir	:	Malang, 02 Mei 1981
Status Perkawinan	:	Kawin
Agama	:	Islam
Golongan/Pangkat	:	III-c / Lektor
Jabatan Fungsional Akademik	:	Asisten Ahli
Perguruan Tinggi	:	UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
Alamat	:	Dusun Genitri Desa Tirtomoyo No. 06 RT/RW 01/01 Pakis Malang
Telp/SMS/iMessage/WA/Line	:	0896-5413-8000
Alamat Email	:	m.jamhuri@mat.uin-malang.ac.id

Riwayat Pendidikan Perguruan Tinggi

Tahun Lulus	Jenjang	Perguruan Tinggi	Jurusan/Prodi
2004	S-1	UIN Malang	Matematika
2009	S-2	Institut Teknologi Sepuluh Nopember	Matematika

Riwayat Penelitian

Tahun	Judul Penelitian	Keterangan
2015	Kondisi Batas Artifisial Pada Persamaan Gelombang Vibrasi Satu-Dimensi	Laporan Penelitian
2015	Evolusi Gelombang Harmonik melalui Serangkaian Pemecah Gelombang berupa Balok Berpori	Laporan Penelitian
2015	Solusi Persamaan keseimbangan Massa Reaktor Menggunakan Metode Pemisahan Variabel	Artikel
2015	Solusi Numerik Persamaan Poisson Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis pada Koordinat Polar	Artikel
2015	Supercritical flow generating a solitary-like wave above a bump	Artikel
2014	Penurunan Model Traffic Flow Berdasarkan Hukum-Hukum Keseimbangan	Artikel
2014	Evolusi gelombang harmonik melalui balok berpori	Laporan Penelitian
2014	Monochromatic Wave over One and Two Bars	Artikel
2012	Penyelesaian Persamaan Nonlinier Orde-Tinggi untuk Akar Berganda	Artikel
2011	Penyelesaian Numerik Persamaan Differensial Biasa Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis	Artikel
2010	Pengembangan Software Aplikasi Matematika dan Statistik untuk Perangkat Bergerak	Laporan Penelitian


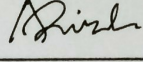
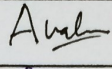
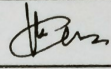
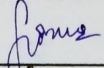

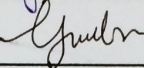
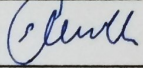




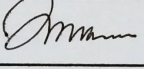
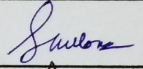
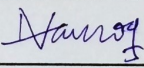
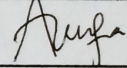
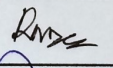
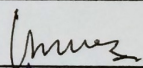
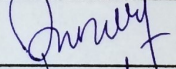
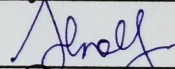
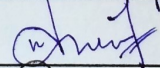
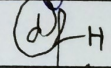
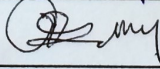
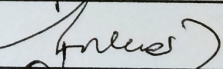
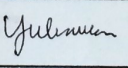
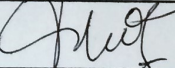
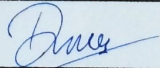
Malang, 31 Agustus 2016

Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502-200501-1-004

Daftar Hadir Sosialisai Hasil Penelitian
Program Bantuan Dana Penelitian UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

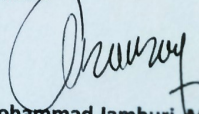
Judul Penelitian : Solusi Numerik Persamaan Air Dangkal pada Masalah Perambatan Gelombang melalui Balok Berpori

Nama Peneliti : Mohammad Jamhuri, M.Si

No	Nama	Tanda Tangan	
1	Muhammad Surya	1	
2	nur Azisda	2	
3	Nurul Anggraini	3	
4	Nur Azlinda	4	
5	Muhammad Only A.	5	
6	Ririn Wilan Mei	6	
7	Yulhetanah	7	
8	Siti Annahad	8	
9	Diana Maulana Sari	9	
10	Yeni Angwari	10	
11	Izzah Laili	11	
12	Rahma Saputri	12	
13	Jauharah	13	
14	Agus Syahid	14	
15	Mufid Shams	15	
16	Ayurika I.	16	
17	Muhammad Ali	17	
18	Siti Zahrohul L.	18	
19	ISM, RIZQA LITA	19	
20	Moh Alex Hager	20	
21	monator strolitah	21	
22	deni gatchur Rahman	22	
23	Muhammad Y-A	23	
24	husein Yag	24	
25	Hafmay A. Laili	25	
26	Duroh Hapsah	26	
27	MOCH. RYAN ADIF	27	
28		28	
29		29	

Malang, 14 Juli 2016

Peneliti


 Mohammad Jamhuri, M.Si



Gambar 5.1: Menyiapkan file presentasi



Gambar 5.2: Pengantar Materi/Pembukaan



Gambar 5.3: Menjelaskan cara mengkonstruksi model Air-Dangkal



Gambar 5.4: Menjelaskan cara diskritisasi persamaan air-dangkal



Gambar 5.5: Menjelaskan cara penyelesaian sistem menggunakan iterasi Gauss-Seidel



Gambar 5.6: Peserta seminar hasil



Gambar 5.7: peserta seminar hasil



Gambar 5.8: peserta seminar hasil

Solusi numerik persamaan air dangkal pada masalah perambatan gelombang melalui media berpori

(Seminar Hasil Penelitian LP2M)

Mohammad Jamhuri

UIN Maulana Malik Ibrahim

14 Juli 2016

- Bagaimana solusi numerik persamaan air-dangkal (SWE):

$$\begin{aligned}u_t + g\eta_x &= 0 \\ \eta_t + hu_x &= (d - h)k\eta_{xx}\end{aligned}\tag{1}$$

menggunakan metode beda-hingga implisit?

- Bagaimana solusi yang diperoleh jika di bandingkan dengan hasil yang diperoleh menggunakan metode prediktor-korektor?

- ① Penerapan metode beda-hingga implisit untuk penyelesaian persamaan air-dangkal (1)
- ② Membandingkan hasil yang diperoleh dengan hasil yang diperoleh dari metode prediktor korektor.

- ① Menjelaskan pemakaian metode beda-hingga implisit dalam penyelesaian sistem persamaan diferensial parsial
- ② Membandingkan hasil yang diperoleh dari kedua metode sehingga pembaca dapat mengetahui kapan metode-metode tersebut harus digunakan.

- Persamaan (1) kita diskritkan menggunakan metode beda-hingga FTCS menjadi

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + g \frac{\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\Delta t} + h \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = (d - h) k \frac{\eta_{j+1}^{n+1} - 2\eta_j^{n+1} + \eta_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (3)$$

- Sederhanakan persamaan diatas menjadi

$$a_1 u_j^{n+1} - a_2 \eta_{j-1}^{n+1} + a_2 \eta_{j+1}^{n+1} = a_1 u_j^n \quad (4)$$

$$-a_3 u_{j-1}^{n+1} + a_3 u_{j+1}^{n+1} - a_4 \eta_{j-1}^{n+1} + (a_1 + 2a_4) \eta_j^{n+1} - a_4 \eta_{j+1}^{n+1} = a_1 \eta_j^n \quad (5)$$

dengan

$$a_1 = \frac{1}{\Delta t}, \quad a_2 = -\frac{g}{2\Delta x}, \quad a_3 = \frac{h}{2\Delta x}, \quad a_4 = \frac{(d-h)k}{\Delta x^2}$$

$$\begin{array}{llllll}
 j = 1 & \rightarrow & a_1 u_1^2 - a_2 \eta_0^2 + a_2 \eta_2^2 & = & a_1 \phi_1 \\
 j = 2 & \rightarrow & a_1 u_2^2 - a_2 \eta_1^2 + a_2 \eta_3^2 & = & a_1 \phi_2 \\
 j = 3 & \rightarrow & a_1 u_3^2 - a_2 \eta_2^2 + a_2 \eta_4^2 & = & a_1 \phi_3 \\
 \vdots & \rightarrow & \vdots & = & \vdots \\
 j = m - 1 & \rightarrow & a_1 u_{m-1}^2 - a_2 \eta_{m-2}^2 + a_2 \eta_m^2 & = & a_1 \phi_{m-1} \\
 j = m & \rightarrow & a_1 u_m^2 - a_2 \eta_{m-1}^2 + a_2 \eta_{m+1}^2 & = & a_1 \phi_m
 \end{array} \tag{6}$$

$$\begin{array}{llllll}
 j = 1 & \Rightarrow & -a_3 u_0^2 + a_3 u_2^2 - a_4 \eta_0^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_1^2 - a_4 \eta_2^2 & = & a_1 \psi_1 \\
 j = 2 & \Rightarrow & -a_3 u_1^2 + a_3 u_3^2 - a_4 \eta_1^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_2^2 - a_4 \eta_3^2 & = & a_1 \psi_2 \\
 j = 3 & \Rightarrow & -a_3 u_2^2 + a_3 u_4^2 - a_4 \eta_2^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_3^2 - a_4 \eta_4^2 & = & a_1 \psi_3 \\
 \vdots & \Rightarrow & \vdots & = & \vdots \\
 j = m-1 & \Rightarrow & -a_3 u_{m-2}^2 + a_3 u_m^2 - a_4 \eta_{m-2}^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_{m-1}^2 - a_4 \eta_m^2 & = & a_1 \psi_{m-2} \\
 j = m & \Rightarrow & -a_3 u_{m-1}^2 + a_3 u_{m+1}^2 - a_4 \eta_{m-1}^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_m^2 - a_4 \eta_{m+1}^2 & = & a_1 \psi_m
 \end{array}
 \tag{7}$$

- Pada sistem persamaan (6) dan (7), pada $j = 1$, dan $j = m$ terdapat suku-suku

$$u_0^2, u_{m+1}^2, \eta_0^2, \quad \text{dan} \quad \eta_{m+1}^2$$

- Suku-suku tersebut disebut sebagai *ghost-points* yang keberadaanya berada diluar domain perhitungan.
- Gunakan ekstrapolasi linier untuk menentukan persamaan pengganti pada indeks $j = 1$ dan $j = m$

- Pada batas kiri gunakan

$$u(\Delta x, 2\Delta t) = u(2\Delta x, \Delta t) + \frac{\partial}{\partial x} u(2\Delta x, \Delta t)(-\Delta x) + \frac{\partial}{\partial t} u(2\Delta x, \Delta t)(\Delta t)$$

dan

$$\eta(\Delta x, 2\Delta t) = \eta(2\Delta x, \Delta t) + \frac{\partial}{\partial x} \eta(2\Delta x, \Delta t)(-\Delta x) + \frac{\partial}{\partial t} \eta(2\Delta x, \Delta t)(\Delta t)$$

- Pada batas kanan gunakan,

$$u(m\Delta x, 2\Delta t) = u((m-1)\Delta x, \Delta t) + \frac{\partial}{\partial x} u((m-1)\Delta x, \Delta t)(\Delta x)$$

dan

$$\eta(m\Delta x, 2\Delta t) = \eta((m-1)\Delta x, \Delta t) + \frac{\partial}{\partial x} \eta((m-1)\Delta x, \Delta t)(\Delta x)$$

Selanjutnya kita peroleh sistem persamaan baru

$$u_1^2 + u_2^2 = \phi_2 - \frac{1}{2} (\phi_3^1 - u_1^1) - \phi_2$$

$$a_1 u_2^2 - a_2 \eta_1^2 + a_2 \eta_3^2 = a_1 \phi_2$$

$$a_1 u_3^2 - a_2 \eta_2^2 + a_2 \eta_4^2 = a_1 \phi_3$$

$$\vdots$$

$$a_1 u_{m-1}^2 - a_2 \eta_{m-2}^2 + a_2 \eta_m^2 = a_1 \phi_{m-1}$$

$$-u_{m-1}^2 + u_m^2 = \phi_{m-1} + \frac{1}{2} (\phi_m - \phi_{m-2}) - \phi_{m-1}$$

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 = \psi_2 - \frac{1}{2} (\psi_3 - \psi_1) - \psi_2$$

$$-a_3 u_1^2 + a_3 u_3^2 - a_4 \eta_1^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_2^2 - a_4 \eta_3^2 = a_1 \psi_2$$

$$-a_3 u_2^2 + a_3 u_4^2 - a_4 \eta_2^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_3^2 - a_4 \eta_4^2 = a_1 \psi_3$$

$$\vdots$$

$$-a_3 u_{m-2}^2 + a_3 u_m^2 - a_4 \eta_{m-2}^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_{m-1}^2 - a_4 \eta_m^2 = a_1 \psi_{m-2}$$

$$-\eta_{m-1}^2 + \eta_m^2 = \psi_{m-1} + \frac{1}{2} (\psi_m - \psi_{m-2}^1) - \psi_{m-1}$$

- Sistem persamaan yang di peroleh dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks

$$AW^{n+1} = B \quad (8)$$

- dengan,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & -a_4 & a_1 + 2a_4 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -a_4 & a_1 + 2a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 + 2a_4 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- dengan W^{n+1} dan B

$$W = \begin{bmatrix} u_1^{n+1} & u_2^{n+1} & u_3^{n+1} & \dots & u_{m-1}^{n+1} & u_m^{n+1} & \eta_1^{n+1} & \eta_2^{n+1} & \eta_3^{n+1} & \dots & \eta_{m-1}^{n+1} \end{bmatrix}$$

dan

$$B = \begin{bmatrix} u_2^n - \frac{1}{2} (u_3^n - u_1^n) - u_2^n \\ a_1 u_2^n \\ a_1 u_3^n \\ \vdots \\ a_1 u_{m-1}^n \\ u_{m-1}^n + \frac{1}{2} (u_m^n - u_{m-2}^n) - u_{m-1}^n \\ \eta_2^n - \frac{1}{2} (\eta_3^n - \eta_1^n) - \eta_2^n \\ a_1 \eta_2^n \\ a_1 \eta_3^n \\ \vdots \\ a_1 \eta_{m-2}^n \\ \eta_{m-1}^n + \frac{1}{2} (\eta_m^n - \eta_{m-2}^n) - \eta_{m-1}^n \end{bmatrix}$$

- Untuk $n = 1$, matriks kolom \mathbf{B} pada persamaan (8) dapat diperoleh menggunakan kondisi awal yang diberikan, yaitu

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \phi_2 - \frac{1}{2}(\phi_3 - \phi_1) - \phi_2 \\ a_1\phi_2 \\ a_1\phi_3 \\ \vdots \\ a_1\phi_{m-1} \\ \phi_{m-1} + \frac{1}{2}(\phi_m - \phi_{m-2}) - \phi_{m-1} \\ \psi_2 - \frac{1}{2}(\psi_3 - \psi_1) - \psi_2 \\ a_1\psi_2 \\ a_1\psi_3 \\ \vdots \\ a_1\psi_{m-2} \\ \psi_{m-1} + \frac{1}{2}(\psi_m - \psi_{m-2}) - \psi_{m-1} \end{bmatrix}$$

- Karena matriks \mathbf{A} pada persamaan (8) merupakan *sparse matrix*, maka metode iterasi merupakan cara terbaik untuk mendapatkan solusi \mathbf{W}^{n+1} .

- Untuk menyelesaikan $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ diberikan hampiran nilai awal $\mathbf{x}^{(0)}$
- Input:
 - banyaknya persamaan n ,
 - elemen-elemen matriks \mathbf{A} , yaitu $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$,
 - elemen-elemen matriks \mathbf{b} atau $b_i, 1 \leq i \leq n$
 - nilai awal $x_i^{(0)}, 1 \leq i \leq n$,
 - Toleransi error tol , dan
 - banyak iterasi maksimum N .
- Output:
 - solusi hampiran x_1, x_2, \dots, x_n atau pesan yang menyatakan iterasi maksimum sudah dilalui.

step 1 set $k = 1$

step 2 while ($k \leq N$) do step 3-6

step 3 for $i = 1, \dots, n$

$$\text{set } x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(0)} + b_i \right]$$

step 4 if $\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)} \| < tol$ then output (x_1, \dots, x_n) ; (the procedure was successful.), STOP.

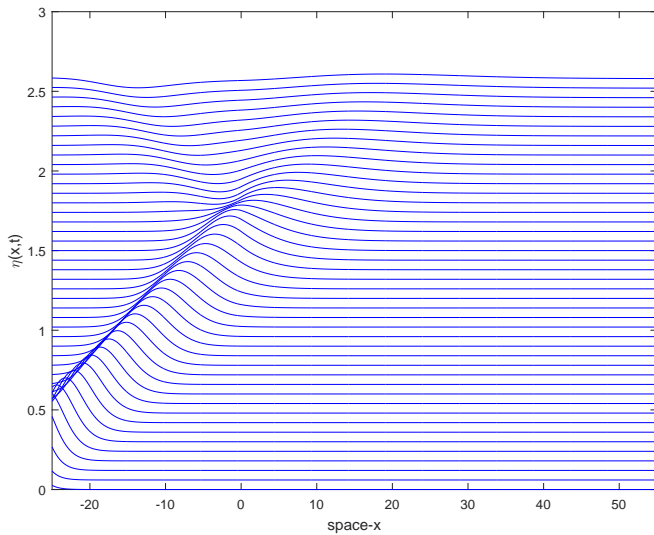
step 5 set $k = k + 1$

step 6 for $i = 1, \dots, n$ set $\mathbf{x}_i^{(0)} = \mathbf{x}_i$

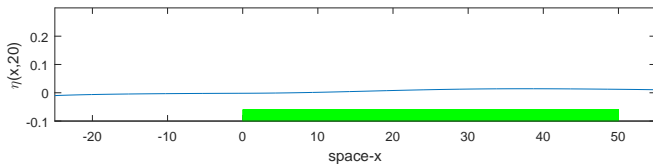
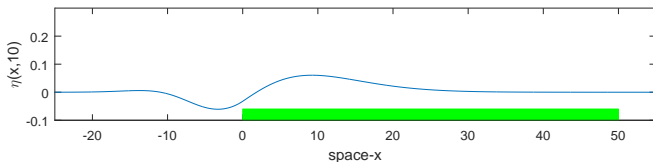
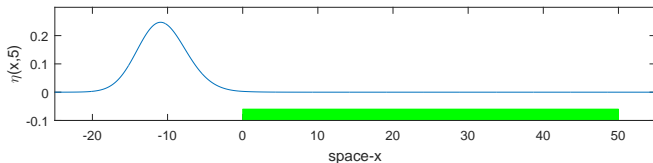
step 7 output('maximum number of iterations exceeded'). STOP

- Parameter-parameter yang digunakan adalah $g = 10$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.1$,
- kedalaman air dinyatakan sebagai $d = 1.5$, kedalaman air diatas permukaan pemecah gelombang dinyatakan sebagai $h = 0.5$, konduktivitas hidrolik $k = 0.3$,
- sedangkan pemecah gelombang berporinya di letakkan pada domain ruang $0 < x < 50$. Kondisi awal yang digunakan berupa gelombang soliter yang datang dari arah kiri dengan amplitudo sebesar 0.5.
- Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 1 di slide berikut:

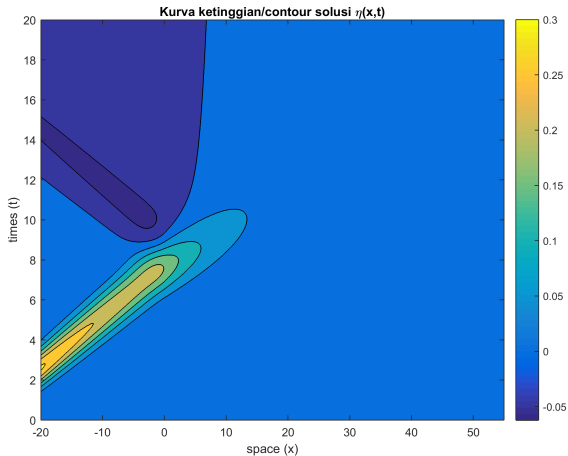
Grafik solusi untuk $\forall x$ dan $\forall t$

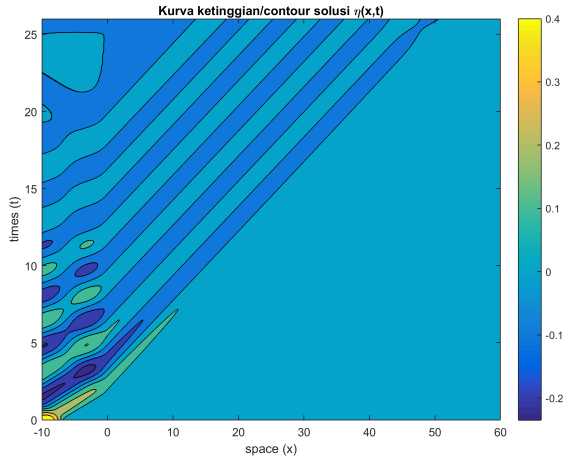


Grafik solusi pada $t = 5, 10$ dan 20

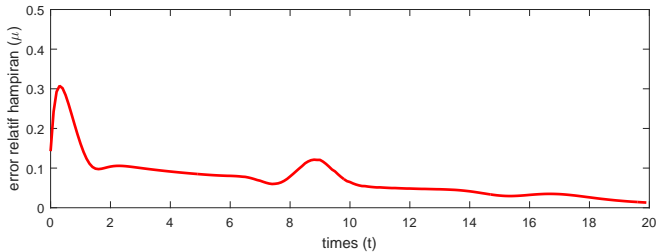
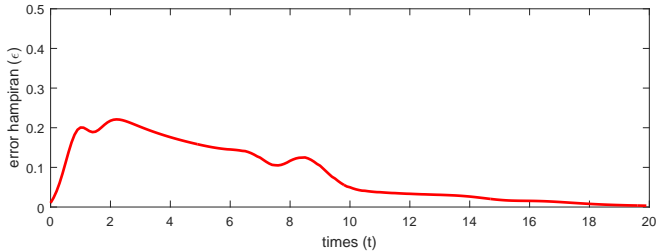


kurva ketinggian (contour) gelombang soliter





grafik error dan relatif error



Solusi Numerik Persamaan Air Dangkal pada Masalah Perambatan Gelombang melalui Media Berpori

Mohammad Jamhuri

Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

Email: m.jamhuri@live.com

Abstrak

Dalam artikel ini dipilih persamaan air-dangkal yang menyatakan perambatan gelombang melalui media berpori. Selanjutnya persamaan tersebut diselesaikan menggunakan metode beda hingga implisit forward-time centered space (FTCS). Dalam menyelesaikan masalah tersebut, digunakan kondisi batas serap untuk mewakili situasi fisis yang menyatakan gelombang terus berjalan melalui batas-batas domain perhitungan. Untuk mengamati performansi dari pemecah gelombang berporinya, digunakan gelombang soliter dan gelombang sinusoidal sebagai gelombang datang. Selanjutnya besarnya penurunan amplitudo dihitung berdasarkan amplitudo gelombang sebelum dan sesudah melalui pemecah gelombangnya. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan bahwa metode beda-hingga implisit cukup baik dan mudah diterapkan dalam penyelesaian sistem persamaan diferensial tersebut.

Pendahuluan

Masalah aliran fluida sangat menarik untuk di amati, karena terjadi pada berbagai jenis saluran baik terbuka maupun tertutup. Pada saluran tertutup, aliran fluida dapat terjadi pada pipa, tangki, selang, dll. Pada saluran terbuka, fluida mengalir pada atmosfer, lautan, sungai dan lain-lain.

Pada tulisan ini akan dibahas solusi numerik masalah aliran fluida pada saluran terbuka, khususnya yang mengalir melalui balok berpori. Pembahasan mengenai aliran fluida melalui sebuah balok telah dilakukan oleh (Yu & Mei, 2000), (Pudjaprasetya & Chendra, 2009), (L. H. Wiryanto, 2010). Selanjutnya (L. H. Wiryanto & Jamhuri, 2014) membahas aliran fluida melalui satu dan dua buah balok yang hasilnya dapat diperumum untuk masalah aliran fluida melalui n -buah balok. Sedangkan kajian tentang aliran fluida pada saluran dengan dasar berupa media berpori dimulai oleh (Mizumura, 1998), yang dilanjutkan oleh (Tsai, Chen, & Lee, 2006), (L. Wiryanto & Anwarus, 2009).

Pada tahap selanjutnya (L. H. Wiryanto, 2011) menurunkan model matematika untuk mengamati aliran fluida yang melalui media berpori. Penelitian tersebut menghasilkan sistem persamaan differensial parsial linier yang serupa dengan persamaan air-dangkal. Di sisi yang lain (Jamhuri, Kusumasuti, & Suharleni, 2013) mengkaji masalah yang sama dengan yang di kaji oleh (L. H. Wiryanto, 2011), tetapi dengan cara melinierisasi persamaan-persamaan pengatur dan menyelesaikannya menggunakan metode pemisahan variabel. Selanjutnya pada tahun 2015 (Jamhuri & Alisah, 2015) membahas tentang aliran fluida melalui serangkaian balok berpori yang berkesimpulan bahwa jumlah balok berpori tanpa ada perubahan total lebar balok tidak berpengaruh pada besarnya penurunan amplitudo gelombang.

Pada penelitian ini kita pilih model matematika yang telah diturunkan oleh Wiryanto (L. H. Wiryanto, 2011) untuk mensimulasikan masalah aliran fluida melalui balok berpori. Setelah menurunkan model, Wiryanto (L. H. Wiryanto, 2011) menunjukkan beberapa solusi numerik untuk masalah tersebut. Metode numerik yang digunakannya adalah eksplisit prediktor-korektor, dan untuk penyelesaian sistem persamaan linier yang dihasilkan Dia menggunakan iterasi Gauss-Seidel. Meskipun demikian penyelesaian secara implisit menggunakan metode tersebut sangat tidak efisien.

Pada penelitian akan kita selesaikan sistem persamaan differensial parsial yang diperoleh oleh (L. H. Wiryanto, 2011) menggunakan metode beda-hingga implisit. Kita pilih metode implisit karena kestabilan dari metode ini selalu dapat diperoleh dan tanpa syarat (Zhu, Yuan, & Sun, 2004), sehingga dalam melakukan simulasi kita dapat memilih time-step yang cukup besar.

Persamaan Pengatur

Model matematika untuk aliran fluida melalui balok berpori yang diturunkan oleh Wiryanto (L. H. Wiryanto, 2011) adalah sebagai berikut:

$$u_t + g\eta_x = 0 \quad (1)$$

$$\eta_t + hu_x = (d - h)k\eta_{xx} \quad (2)$$

yang merupakan sistem persamaan differensial parsial linier.

Pada persamaan tersebut, η menyatakan perubahan ketinggian permukaan fluida, u adalah kecepatan potensial dalam arah- x , dengan x dan t secara berturut-turut menyatakan dimensi ruang dan waktu. Sedangkan d dan h secara berturut-turut menyatakan kedalaman saluran dan ketinggian dari balok berporinya, dan k adalah konduktivitas hidrolik yang menyatakan koefisien porositas dari balok.

Persamaan (1) dan (2) serupa dengan persamaan air dangkal atau SWE (shallow-water equations), yang memuat suku tambahan berupa turunan kedua yang menyatakan efek dari balok berpori. Jika balok berpori-nya diabaikan ($d = h$), maka persamaan (2) akan sama dengan persamaan air-dangkal linier, demikian juga jika partikel tidak dapat melalui balok berpori maka konduktivitas hidroliknya tidak ada ($k = 0$).

Ilustrasi dari permasalahan aliran fluida melalui balok berpori yang dinyatakan dalam persamaan (1) dan (2) ditunjukkan pada gambar 1.

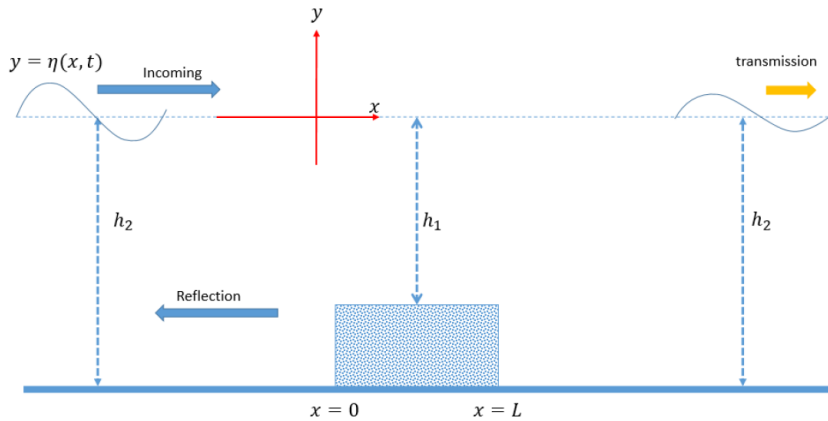


Figure 1: Sketsa aliran fluida melalui balok berpori

Metode Beda-Hingga Implisit

Pada bab ini akan kita bahas bagaimana menerapkan metode implisit dalam penyelesaian numerik masalah persamaan gelombang air-dangkal

$$u_t + g\eta_x = 0 \quad (3)$$

$$\eta_t + hu_x = (d - h)k\eta_{xx} \quad (4)$$

dengan diberikan kondisi awal

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{dan} \quad \eta(x, 0) = \psi(x) \quad (5)$$

Persamaan (3) dan (4) kita diskritkan secara implisit menggunakan metode beda hingga skema *forward-time centered-space* (FTCS) menjadi

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + g \frac{\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\Delta t} + h \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = (d-h)k \frac{\eta_{j+1}^{n+1} - 2\eta_j^{n+1} + \eta_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (7)$$

sedangkan kondisi awal (5) dapat didiskritkan menjadi

$$u_j^1 = \phi_j \quad \text{dan} \quad \eta_j^1 = \psi_j \quad (8)$$

dengan $\phi_j = \phi(x_j)$ atau $\phi(j\Delta x)$ dan $\psi_j = \psi(x_j)$ atau $\psi(j\Delta x)$. Indeks waktu $(n+1)$ yang melekat pada super skrip u dan η menyatakan suku-suku yang belum diketahui, sedangkan indeks waktu (n) pada superskrip u dan η menyatakan suku-suku yang diketahui. Selanjutnya, dengan menuliskan suku-suku yang memiliki indeks waktu $(n+1)$ di ruas kiri dan yang lainnya di ruas kanan persamaan (6) dan (7) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} u_j^{n+1} + \frac{g}{2\Delta x} \eta_{j+1}^{n+1} - \frac{g}{2\Delta x} \eta_{j-1}^{n+1} &= \frac{1}{\Delta t} u_j^n \\ \frac{1}{\Delta t} \eta_j^{n+1} + \frac{h}{2\Delta x} u_{j+1}^{n+1} - \frac{h}{2\Delta x} u_{j-1}^{n+1} - \frac{(d-h)k}{\Delta x^2} \eta_{j+1}^{n+1} + \\ \frac{2(d-h)k}{\Delta x^2} \eta_j^{n+1} + \frac{(d-h)k}{\Delta x^2} \eta_{j-1}^{n+1} &= \frac{1}{\Delta t} \eta_j^n \end{aligned}$$

Persamaan-persamaan diatas kita sederhanakan lagi dengan melakukan pengelompokan terhadap suku-suku yang memiliki indeks subskrip dan superskrip yang sama, yaitu diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} u_j^{n+1} - \frac{g}{2\Delta x} \eta_{j-1}^{n+1} + \frac{g}{2\Delta x} \eta_{j+1}^{n+1} &= \frac{1}{\Delta t} u_j^n \\ -\frac{h}{2\Delta x} u_{j-1}^{n+1} + \frac{h}{2\Delta x} u_{j+1}^{n+1} + \frac{(d-h)k}{\Delta x^2} \eta_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2(d-h)k}{\Delta x^2} \right) \eta_j^{n+1} - \\ \frac{(d-h)k}{\Delta x^2} \eta_{j+1}^{n+1} &= \frac{1}{\Delta t} \eta_j^n \end{aligned}$$

Persamaan diatas dapat dituliskan kembali secara lebih sederhana menjadi

$$a_1 u_j^{n+1} - a_2 \eta_{j-1}^{n+1} + a_2 \eta_{j+1}^{n+1} = a_1 u_j^n \quad (9)$$

$$-a_3 u_{j-1}^{n+1} + a_3 u_{j+1}^{n+1} - a_4 \eta_{j-1}^{n+1} + (a_1 + 2a_4) \eta_j^{n+1} - a_4 \eta_{j+1}^{n+1} = a_1 \eta_j^n \quad (10)$$

dengan memisalkan koefisien-koefisien konstan dari persamaan (9) dan (10) sebagai

$$a_1 = \frac{1}{\Delta t}, \quad a_2 = -\frac{g}{2\Delta x}, \quad a_3 = \frac{h}{2\Delta x}, \quad a_4 = \frac{(d-h)k}{\Delta x^2}.$$

Untuk $n = 1$, kita dapat mensubstitusikan kondisi awal (8) pada persamaan (9) dan (10), sedemikian hingga kita peroleh

$$a_1 u_j^2 - a_2 \eta_{j-1}^2 + a_2 \eta_{j+1}^2 = a_1 \phi_j \quad (11)$$

$$-a_3 u_{j-1}^2 + a_3 u_{j+1}^2 - a_4 \eta_{j-1}^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_j^2 - a_4 \eta_{j+1}^2 = a_1 \psi_j \quad (12)$$

Proses selanjutnya adalah menjabarkan persamaan (11) dan (12) dengan mensubstitusi indeks j untuk $j = 1, 2, \dots, m$. Hasil yang diperoleh dari penjabaran persamaan (11) adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} j=1 &\rightarrow a_1 u_1^2 - a_2 \eta_0^2 + a_2 \eta_2^2 = a_1 \phi_1 \\ j=2 &\rightarrow a_1 u_2^2 - a_2 \eta_1^2 + a_2 \eta_3^2 = a_1 \phi_2 \\ j=3 &\rightarrow a_1 u_3^2 - a_2 \eta_2^2 + a_2 \eta_4^2 = a_1 \phi_3 \\ &\vdots \rightarrow \vdots = \vdots \\ j=m-1 &\rightarrow a_1 u_{m-1}^2 - a_2 \eta_{m-2}^2 + a_2 \eta_m^2 = a_1 \phi_{m-1} \\ j=m &\rightarrow a_1 u_m^2 - a_2 \eta_{m-1}^2 + a_2 \eta_{m+1}^2 = a_1 \phi_m \end{aligned} \quad (13)$$

sedangkan dari persamaan (12) di peroleh:

$$\begin{aligned}
j = 1 & \Rightarrow -a_3 u_0^2 + a_3 u_2^2 - a_4 \eta_0^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_1^2 - a_4 \eta_2^2 &= a_1 \psi_1 \\
j = 2 & \Rightarrow -a_3 u_1^2 + a_3 u_3^2 - a_4 \eta_1^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_2^2 - a_4 \eta_3^2 &= a_1 \psi_2 \\
j = 3 & \Rightarrow -a_3 u_2^2 + a_3 u_4^2 - a_4 \eta_2^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_3^2 - a_4 \eta_4^2 &= a_1 \psi_3 \\
& \vdots & \vdots \\
j = m-1 & \Rightarrow -a_3 u_{m-2}^2 + a_3 u_m^2 - a_4 \eta_{m-2}^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_{m-1}^2 - a_4 \eta_m^2 &= a_1 \psi_{m-2} \\
j = m & \Rightarrow -a_3 u_{m-1}^2 + a_3 u_{m+1}^2 - a_4 \eta_{m-1}^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_m^2 - a_4 \eta_{m+1}^2 &= a_1 \psi_m
\end{aligned} \tag{14}$$

Pada sistem persamaan linier (13) dan (14) diatas, terdapat variabel-variabel tak diketahui yang menyatukan titik-titik yang berada diluar domain perhitungan, yaitu η_0^2, η_{m+1}^2 serta u_0^2, u_{m+1}^2 . Titik-titik yang berada diluar domain perhitungan tersebut tidak dapat diperoleh atau diukur, titik-titik tersebut seringkali disebut sebagai *ghost-points*. Keberadaan *ghost-points* pada sistem tersebut menyebabkan sistem tersebut secara langsung tidak dapat diselesaikan. Untuk mengatasi masalah tersebut, persamaan-persamaan yang memuat *ghost point* akan kita ganti dengan persamaan-persamaan artifisial yang di bangkitkan menggunakan ekstrapolasi linier berdasarkan data pada titik-titik grid interior domain perhitungan. Selanjutnya sistem diatas dapat diselesaikan menggunakan metode iterasi Gauss-Seidel ataupun metode iterasi Jacobi (Chapra & Canale, 1998, hal. 227-339).

Metode Gauss-Seidel

Metode Gauss-Seidel digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear (SPL) berukuran besar dan proporsi koefisien nolnya besar, seperti sistem-sistem yang banyak ditemukan dalam sistem persamaan diferensial. Metode iterasi Gauss-Seidel dikembangkan dari gagasan metode iterasi pada solusi persamaan tak linier. Teknik iterasi jarang digunakan untuk menyelesaikan SPL berukuran kecil karena metode-metode langsung seperti metode eliminasi Gauss lebih efisien daripada metode iteratif. Akan tetapi, untuk SPL berukuran besar dengan persentase elemen nol pada matriks koefisien besar, teknik iterasi lebih efisien daripada metode langsung dalam hal penggunaan memori komputer maupun waktu komputasi. Dengan metode iterasi Gauss-Seidel sesatan pembulatan dapat diperkecil karena dapat meneruskan iterasi sampai solusinya seteliti mungkin sesuai dengan batas sesatan yang diperbolehkan.

Suatu sistem persamaan linier terdiri atas sejumlah berhingga persamaan linear dalam sejumlah berhingga variabel. Menyelesaikan suatu sistem persamaan linier adalah mencari nilai-nilai variabel yang belum diketahui yang memenuhi semua persamaan linier yang diberikan. Untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan $k = 1, 2, 3, \dots$, Suatu sistem persamaan linier terdiri atas sejumlah berhingga persamaan linear dalam sejumlah berhingga variabel. Menyelesaikan suatu sistem persamaan linier adalah mencari nilai-nilai variabel yang belum diketahui yang memenuhi semua persamaan linier yang diberikan.

Rumus iterasi untuk hampiran ke- k pada metode iterasi Gauss-Seidel adalah sebagai berikut. Untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan $k = 1, 2, 3, \dots$,

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{15}$$

secara lebih detil dapat dilihat pada langkah-langkah penyelesaian sistem berikut ini:

- Untuk menyelesaikan $Ax = b$ diberikan hampiran nilai awal $x^{(0)}$
- Input:
 - banyaknya persamaan n ,
 - elemen-elemen matriks A , yaitu $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$,

- elemen-elemen matriks \mathbf{b} atau $b_i, 1 \leq i \leq n$
- nilai awal $\mathbf{x}_i^{(0)}, 1 \leq i \leq n$,
- Toleransi error tol , dan
- banyak iterasi maksimum N .

• Output:

- solusi hampiran x_1, x_2, \dots, x_n atau pesan yang menyatakan iterasi maksimum sudah dilalui.

Atau jika dalam dituliskan dalam bentuk algoritma/*pseudo code* adalah sebagai berikut ini:

step 1 set $k = 1$

step 2 while $(k \leq N)$ do step 3-6

step 3 for $i = 1, \dots, n$

$$\text{set } x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(0)} + b_i \right]$$

step 4 if $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\| < tol$ then output (x_1, \dots, x_n) ; (the prosedure was successful.), STOP.

step 5 set $k = k + 1$

step 6 for $i = 1, \dots, n$ set $\mathbf{x}_i^{(0)} = \mathbf{x}_i$

step 7 output('maximum number of iterations exceeded'). STOP

Kondisi batas artifisial dengan Ekstrapolasi

Ekstrapolasi adalah perluasan data di luar data yang tersedia. Dalam penelitian ini data yang dianggap tersedia adalah nilai-nilai η dan u yang berada dalam interior domain, serta semua nilai yang telah diperoleh dari perhitungan waktu sebelumnya. Ekstrapolasi yang akan kita gunakan adalah ekstrapolasi linier atau orde-1, karena ekstrapolasi dengan orde yang lebih tinggi akan menemui kesulitan di dalam memperoleh data untuk membangun ekstrapolasinya.

Metode ekstrapolasi linier dapat kita peroleh menggunakan deret Taylor orde-1, yaitu titik-titik yang berada pada batas domain kita hitung menggunakan titik-titik yang ada disekitar titik batas. Secara lebih detail yaitu: nilai u dan η pada titik (x_1, t^2) kita ekspansi menggunakan nilai-nilai u dan η yang berada di sekitaran titik (x_2, t^1) , sedangkan nilai u dan η pada titik (x_m, t^2) kita ekspansi menggunakan nilai-nilai u dan η yang berada di sekitaran titik (x_{m-1}, t^1) . Untuk memudahkan pemahaman dalam penerapan deret Taylor, nilai u dan η di titik (x_1, t^2) kita nyatakan sebagai u_1^2 dan η_1^2 sedangkan nilai u dan η di titik (x_m, t^2) kita nyatakan sebagai u_m^2 dan η_m^2 . Menggunakan deret Taylor orde-1, kita peroleh persamaan-persamaan ekstrapolasi untuk batas-batas domain sebagai berikut:

$$u_1^2 - u_2^2 = u_2^1 - \frac{1}{2} (u_3^1 - u_1^1) - u_2^1 \quad (16)$$

$$\eta_1^2 - \eta_2^2 = \eta_2^1 - \frac{1}{2} (\eta_3^1 - \eta_1^1) - \eta_2^1 \quad (17)$$

Persamaan (16) dan (17) untuk batas kiri, dan persamaan (18) dan (19) untuk batas kanan

$$-u_{m-1}^2 + u_m^2 = u_{m-1}^1 + \frac{1}{2} (u_m^1 - u_{m-2}^1) - u_{m-1}^1 \quad (18)$$

$$-\eta_{m-1}^2 + \eta_m^2 = \eta_{m-1}^1 + \frac{1}{2}(\eta_m^1 - \eta_{m-2}^1) - \eta_{m-1}^1 \quad (19)$$

Sampai disini, kita telah memperoleh 4 buah persamaan baru yang kita bangkitkan menggunakan ekstrapolasi terhadap kondisi batas, yaitu persamaan (??), (??), (??) dan persamaan (??). Untuk menentukan nilai-nilai u dan η , kita selesaikan sistem persamaan (??) dan (??) beserta persamaan-persamaan yang diperoleh dari ekstrapolasi secara simultan sebagai satu buah sistem, yaitu

$$\begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 &= \phi_2^1 - \frac{1}{2}(\phi_3^1 - u_1^1) - \phi_2^1 \\ a_1 u_2^2 - a_2 \eta_1^2 + a_2 \eta_3^2 &= a_1 \phi_2 \\ a_1 u_3^2 - a_2 \eta_2^2 + a_2 \eta_4^2 &= a_1 \phi_3 \\ &\vdots \\ a_1 u_{m-1}^2 - a_2 \eta_{m-2}^2 + a_2 \eta_m^2 &= a_1 \phi_{m-1} \\ -u_{m-1}^2 + u_m^2 &= \phi_{m-1} + \frac{1}{2}(\phi_m - \phi_{m-2}) - \phi_{m-1} \\ \eta_1^2 + \eta_2^2 &= \psi_2 - \frac{1}{2}(\psi_3 - \psi_1) - \psi_2 \\ -a_3 u_1^2 + a_3 u_3^2 - a_4 \eta_1^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_2^2 - a_4 \eta_3^2 &= a_1 \psi_2 \\ -a_3 u_2^2 + a_3 u_4^2 - a_4 \eta_2^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_3^2 - a_4 \eta_4^2 &= a_1 \psi_3 \\ &\vdots \\ -a_3 u_{m-2}^2 + a_3 u_m^2 - a_4 \eta_{m-2}^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_{m-1}^2 - a_4 \eta_m^2 &= a_1 \psi_{m-2} \\ -\eta_{m-1}^2 + \eta_m^2 &= \psi_{m-1} + \frac{1}{2}(\psi_m - \psi_{m-2}) - \psi_{m-1} \end{aligned}$$

Variabel-variabel yang tak diketahui pada sistem persamaan diatas adalah $u_1^2, u_2^2, \dots, u_m^2$ dan $\eta_1^2, \eta_2^2, \dots, \eta_m^2$, sedemikian hingga dapat kita tuliskan sebagai sebuah persamaan matriks *square* yang ukuran baris dan kolomnya sama, yaitu $(2m)$. Misalkan

$$\mathbf{w} = [u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad \cdots \quad u_{m-1}^2 \quad u_m^2 \quad \eta_1^2 \quad \eta_2^2 \quad \eta_3^2 \quad \cdots \quad \eta_{m-1}^2 \quad \eta_m^2]^t$$

dan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & -a_4 & a_1 + 2a_4 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -a_4 & a_1 + 2a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 + 2a_4 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

serta

$$B = \begin{bmatrix} \phi_2 - \frac{1}{2}(\phi_3 - \phi_1) - \phi_2 \\ a_1\phi_2 \\ a_1\phi_3 \\ \vdots \\ a_1\phi_{m-1} \\ \phi_{m-1} + \frac{1}{2}(\phi_m - \phi_{m-2}) - \phi_{m-1} \\ \psi_2 - \frac{1}{2}(\psi_3 - \psi_1) - \psi_2 \\ a_1\psi_2 \\ a_1\psi_3 \\ \vdots \\ a_1\psi_{m-2} \\ \psi_{m-1} + \frac{1}{2}(\psi_m - \psi_{m-2}) - \psi_{m-1} \end{bmatrix}$$

maka sistem persamaan tersebut dapat kita tuliskan menjadi sebuah persamaan matriks

$$Aw^2 = B \quad (20)$$

Ukuran matriks A , w , dan B secara berturut-turut adalah $(2m \times 2m)$, $(2m \times 1)$, dan $(2m \times 1)$. Sistem persamaan (20) dapat diselesaikan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan atau metode-metode penyelesaian sistem persamaan linier yang lainnya. Karena bentuk dari matriks A yang sparse atau banyak memuat elemen nol, maka sistem tersebut akan sangat efektif jika diselesaikan menggunakan metode iterasi Jacobi ataupun metode iterasi Gauss-Seidel. Dalam penelitian ini, untuk menyelesaikan sistem persamaan linier (20) akan kita gunakan metode iterasi Gauss-Seidel.

Penyelesaian sistem persamaan (20) akan menghasilkan vektor

$$w^2 = (u_1^2, u_2^2, u_3^2, \dots, u_m^2, \eta_1^2, \eta_2^2, \eta_3^2, \dots, \eta_m^2)^t.$$

Berikutnya untuk menentukan nilai-nilai

$$w^{n+1} = (u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, u_3^{n+1}, \dots, u_m^{n+1}, \eta_1^{n+1}, \eta_2^{n+1}, \eta_3^{n+1}, \dots, \eta_m^{n+1})^t,$$

dengan $n \in \{2, 3, \dots, p\}$ dimana p adalah banyak titik diskrit untuk waktu t kita gunakan cara yang sama sebagaimana cara memformulasikan sistem persamaan linier untuk menentukan w^2 . Adapun sistem yang diperoleh secara umum dapat di tuliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_1^{n+1} + u_2^{n+1} &= u_2^n - \frac{1}{2}(u_3^n - u_1^n) - u_2^n \\ a_1 u_2^{n+1} - a_2 \eta_1^{n+1} + a_2 \eta_3^{n+1} &= a_1 u_2^n \\ a_1 u_3^{n+1} - a_2 \eta_2^{n+1} + a_2 \eta_4^{n+1} &= a_1 u_3^n \\ &\vdots \\ a_1 u_{m-1}^{n+1} - a_2 \eta_{m-2}^{n+1} + a_2 \eta_m^{n+1} &= a_1 u_{m-1}^n \\ -u_{m-1}^{n+1} + u_m^{n+1} &= u_{m-1}^n + \frac{1}{2}(u_m^n - u_{m-2}^n) - u_{m-1}^n \\ \eta_1^{n+1} + \eta_2^{n+1} &= \eta_2^n - \frac{1}{2}(\eta_3^n - \eta_1^n) - \eta_2^n \\ -a_3 u_1^{n+1} + a_3 u_3^{n+1} - a_4 \eta_1^{n+1} + (a_1 + 2a_4) \eta_2^{n+1} - a_4 \eta_3^{n+1} &= a_1 \eta_2^n \\ -a_3 u_2^2 + a_3 u_4^2 - a_4 \eta_2^2 + (a_1 + 2a_4) \eta_3^2 - a_4 \eta_4^2 &= a_1 \eta_3^n \\ &\vdots \\ -a_3 u_{m-2}^{n+1} + a_3 u_m^{n+1} - a_4 \eta_{m-2}^{n+1} + (a_1 + 2a_4) \eta_{m-1}^{n+1} - a_4 \eta_m^{n+1} &= a_1 \eta_{m-2}^n \\ -\eta_{m-1}^{n+1} + \eta_m^{n+1} &= \eta_{m-1}^n + \frac{1}{2}(\eta_m^n - \eta_{m-2}^n) - \eta_{m-1}^n \end{aligned}$$

Jika dituliskan dalam bentuk persamaan matriks

$$Aw^{n+1} = B \quad (21)$$

maka matrik-matriks yang bersesuaian adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & -a_4 & a_1 + 2a_4 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -a_4 & a_1 + 2a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 + 2a_4 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$w^{n+1} = \begin{bmatrix} u_1^{n+1} & u_2^{n+1} & u_3^{n+1} & \cdots & u_{m-1}^{n+1} & u_m^{n+1} & \eta_1^{n+1} & \eta_2^{n+1} & \eta_3^{n+1} & \cdots & \eta_{m-1}^{n+1} & \eta_m^{n+1} \end{bmatrix}^t$$

$$B = \begin{bmatrix} u_2^n - \frac{1}{2}(u_3^n - u_1^n) - u_2^n \\ a_1 u_2^n \\ a_1 u_3^n \\ \vdots \\ a_1 u_{m-1}^n \\ u_{m-1}^n + \frac{1}{2}(u_m^n - u_{m-2}^n) - u_{m-1}^n \\ \eta_2^n - \frac{1}{2}(\eta_3^n - \eta_1^n) - \eta_2^n \\ a_1 \eta_2^n \\ a_1 \eta_3^n \\ \vdots \\ a_1 \eta_{m-2}^n \\ \eta_{m-1}^n + \frac{1}{2}(\eta_m^n - \eta_{m-2}^n) - \eta_{m-1}^n \end{bmatrix}$$

Untuk menyelesaikan persamaan SWE di atas secara keseluruhan akan digunakan bantuan software Matlab sebagai alat perhitungan, adapun kode program yang dibuat berdasarkan langkah-langkah penyelesaian diatas dapat dilihat pada algoritma 1 berikut:

Simulasi Numerik

Untuk melakukan simulasi numerik, diperlukan kondisi batas di kiri sebagai input, dan kondisi batas di kanan sebagai output yang menyatakan situasi fisis dari perjalanan gelombang, dapat berupa penyerapan atau pemantulan. Kondisi batas serap dapat diformulasikan menggunakan ekstrapolasi linier, dan pemantulan pada kondisi batas dapat dinyatakan dengan memberikan suatu nilai pada η dan nilai negatif dari u yang berasal dari indeks sebelumnya. Untuk mensimulasikan situasi fisis, domain- x kita bagi menjadi 3 sub bagian, yaitu bagian pertama sebelum 0 atau $x < 0$ menyatakan situasi aliran air sebelum melalui pemecah gelombang, bagian kedua adalah $0 < x < L$, menyatakan situasi dimana pemecah gelombang berada, dan bagian ketiga $x > 0$ menyatakan situasi setelah gelombang melalui pemecah gelombang.

Prosedur numerik yang dijelaskan pada subbab sebelumnya digunakan untuk mengamati perambatan gelombang melalui sebuah pemecah gelombang terendam. Karena kita bekerja pada model yang variabel-variabelnya berdimensi, kita gunakan gravitasi $g = 10$. Untuk perhitungan kita gunakan $\Delta x = 0.2$, dan

berbagai variasi kedalaman air d , serta kedalaman air diatas permukaan pemecah gelombang h , konduktivitas hidrolis k dan pemecah gelombang di letakkan pada $0 < x < L$.

Untuk kondisi awal kita gunakan dua macam model gelombang, yaitu gelombang soliter yang akan kita bangkitkan menggunakan fungsi secant hiperbolik, dan gelombang sinusoidal yang akan kita bangkitkan menggunakan fungsi cosinus. Pada gambar 2, kita tunjukkan perambatan gelombang melalui pemecah gelombang berpori. Untuk menunjukkan simulasi, kita menggambar permukaan gelombang pada beberapa nilai t . Gelombang sinusoidal datang dari kiri, berjalan melalui dasar rata dengan kedalaman $d = 1.5$ dan melalui pemecah gelombang dengan tinggi 0.5 dari dasar saluran, dengan $k = 0.3$, diletakkan pada interval $[0, 50]$. Diatas pemecah gelombang berpori, gelombang berubah ketinggiannya dan amplitudonya berkurang serta menjadi gelombang yang serupa dengan bentuk sinusoidal. Melalui pemecah gelombang dengan panjang gelombang yang sama yaitu $\lambda = 39.4$ sebagai gelombang datang. Amplitudo gelombang sebelum dan sesudah melalui pemecah gelombang dapat dilihat pada gambar 2 berikut.

Secara numerik kita dapat menghitung besarnya penurunan amplitudo gelombang dari 0.15 menjadi 0.0959. Untuk itu, kita dapat menghitung besarnya energi yang berkurang relatif terhadap kuadrat amplitudo gelombang seperti pada (Yu & Mei, 2000). Pemecah gelombang menghilangkan energi sebesar 59% dari energi gelombang transmisi. Untuk L yang lebih panjang, kita memperoleh gelombang dengan amplitudo yang lebih kecil setelah melalui pemecah gelombang. Ini berbeda dengan pemecah gelombang yang solid atau tidak berpori, yang mana kita dapat menentukan panjang pemecah gelombang optimal, yang dapat meminimumkan amplitudo gelombang datang atau gelombang transmisi, lihat (Mei, 1989) dan juga (L. H. Wiryanto, 2010).

Suku η_{xx} pada persamaan SWE (4) menyerap dan menurunkan amplitudo gelombang, adapun kekuatan suku tersebut dalam menurunkan amplitudo bergantung pada koefisien k dan $d-h$. Kita tunjukkan pada gambar 3, plot dari permukaan gelombang $\eta(x, 20)$ untuk $k = 0.3$ dan $k = 0.5$. Kita menghitung gelombang datang yang berbentuk sinusoidal yang merambat melalui pemecah gelombang berpori dengan panjang pemecah gelombang $L = 100$ dan tinggi $d - h = 0.5$. pada daerah $x > 100$, gelombang menjadi seperti sinusoidal, karena mereka dihitung dari persamaan air-dangkal linier. Penurunan amplitudo gelombang, diatas pemecah gelombang berpori, sesuai dengan solusi analitik dari gelombang monokromatik pada (L. Wiryanto & Anwarus, 2009). Gelombang yang merambat diatas pemecah gelombang berpori menurunkan amplitudo secara exponential terhadap x . Untuk itu, keberadaan pemecah gelombang berpori tersebut juga mengurangi energi gelombang. Untuk beberapa nilai L dan $(d - h)k$, kita dapat menghitung besarnya energi yang hilang karena pemecah gelombang berpori. Pada gambar 4, kita plot persentase dari berkurangnya energi gelombang terhadap $(d - h)k$ dengan panjang pemecah gelombang sebesar $L = 50, 60$, dan 80 . Kita gunakan $(d - h)k$, sebagai sumbu horizontal, karena ketinggian dan konduktivitas hidrolis dari pemecah gelombang terjadi sebagai salah satu koefisien dari η_{xx} pada persamaan (4).

Selanjutnya untuk $t = 20$, dapat kita lihat hasilnya sebagai berikut

Untuk gelombang datang lainnya, seperti gelombang soliter, perambatan gelombang tersebut dapat di observasi secara numerik dari model (21). Ketika digunakan fungsi secan hiperbolik sebagai gelombang datang, kita memperoleh hasil yang menyerupai gelombang monokromatik. Kita dapat mengamati perubahan bentuk gelombang tersebut setelah melalui pemecah gelombang berpori yang menyebarkan gelombang dan menurunkan amplitudonya, seperti pada gambar 5a.

Karena kita meletakkan pemecah gelombang pada dasar saluran yang rata, perubahan kedalaman air menyebabkan sebagian gelombang dipantulkan. Pemantulan terjadi ketika gelombang memasuki daerah dimana pemecah gelombang berpori berada, karena kedalaman air berubah dari d menjadi $d - h$. Pemantulan gelombang kedua dengan amplitudo yang lebih kecil berjalan dibelakang pantulan gelombang yang pertama. Itu terjadi setelah perubahan kedalaman air yang kedua dari $d - h$ menjadi d .

Proses pemantulan gelombang ini juga terjadi dan dapat diamati pada gambar 2, tetapi gelombang pantulnya berinteraksi dengan gelombang datang. Hal ini ditunjukkan oleh adanya sedikit kenaikan dan penurunan dari amplitudo gelombang datang. Untuk mengamati pantulan gelombang tersebut, kita menggunakan gelombang soliter sebagai gelombang datang pada batas kiri, sedemikian hingga ketika

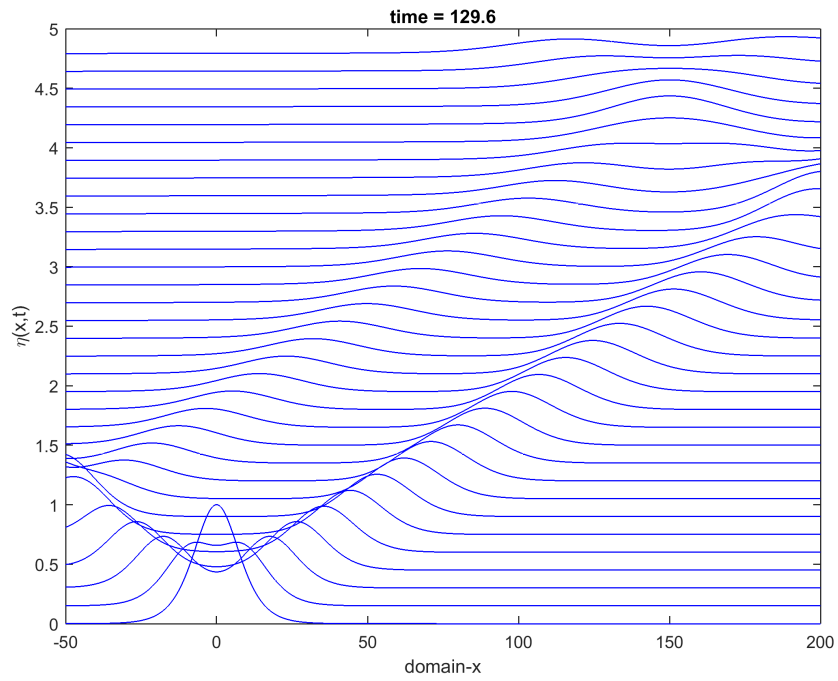


Figure 2: Plot perambatan gelombang melalui pemecah gelombang berpori yang terletak pada daerah $0 < x < L, L = 50$

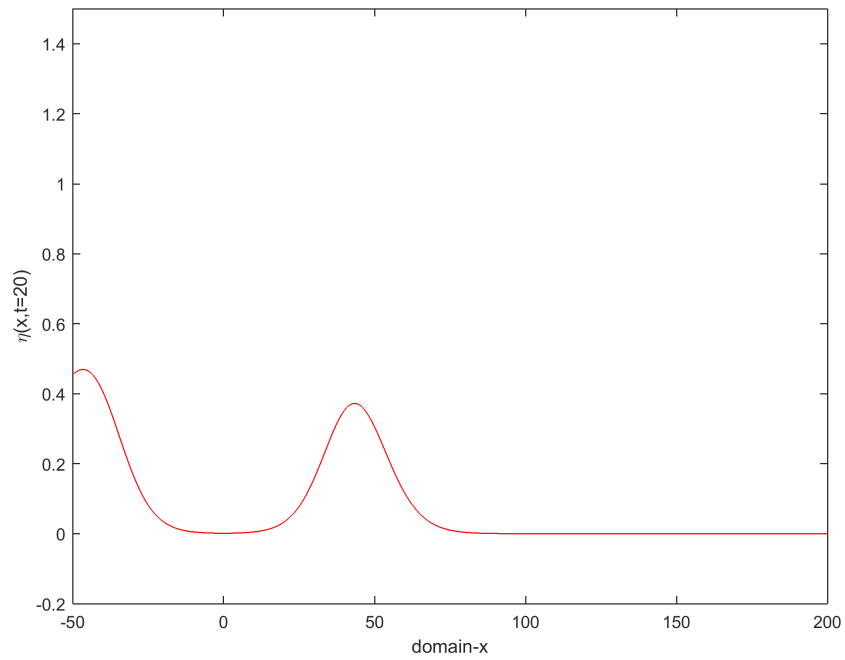


Figure 3: Plot dari $\eta(x, 20)$

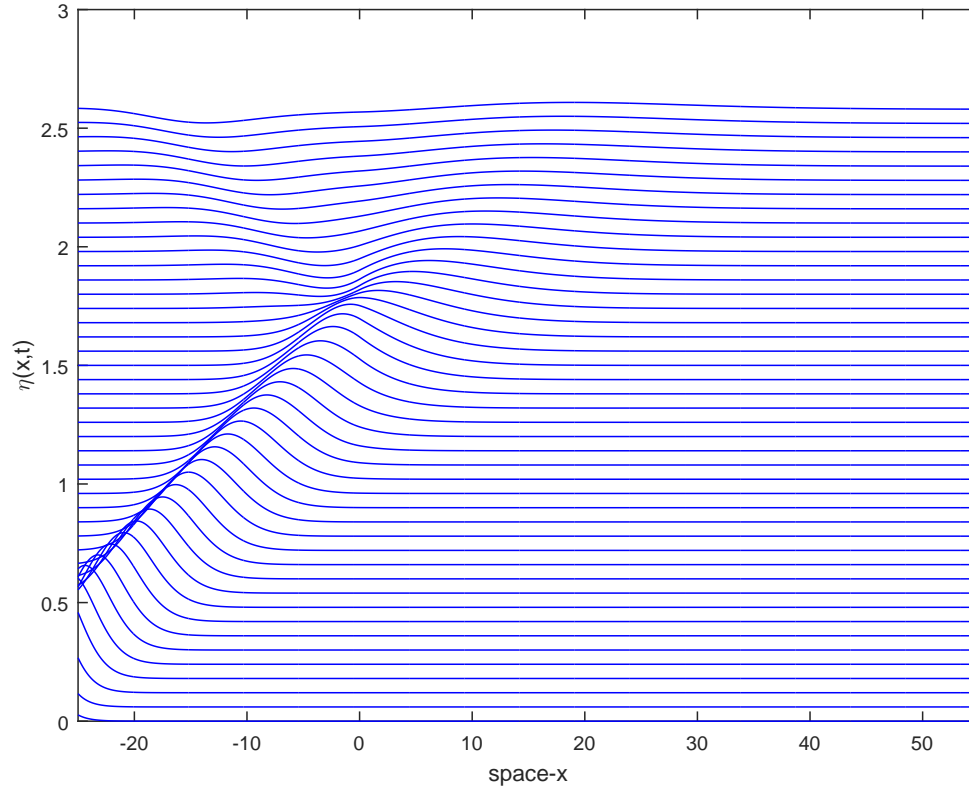


Figure 4: Solusi η untuk seluruh ruang (x) dan waktu (t)

gelombangnya melewati pemecah gelombang, gelombang pantulnya dapat dilihat berjalan ke kiri tanpa berinteraksi dengan gelombang lainnya pada Gambar 5a. Kita juga menunjukkan profil permukaan gelombang pada $t = 24$ pada gambar 5b, menghasilkan gelombang transmisi dalam skala yang sesuai. Pemecah gelombang memiliki panjang $L = 70$; dan $k = 0.3$, $d - h = 0.7$.

Percobaan 1

Pada simulasi ini parameter-parameter yang digunakan adalah $g = 10$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, kedalaman air dinyatakan sebagai $d = 1.5$, kedalaman air diatas permukaan pemecah gelombang dinyatakan sebagai $h = 0.5$, konduktivitas hidrolik $k = 0.3$, sedangkan pemecah gelombang berporinya di letakkan pada domain ruang $0 < x < 50$. Kondisi awal yang digunakan berupa gelombang soliter yang datang dari arah kiri dengan amplitudo sebesar 0.5. Pengamatan dilakukan terhadap ketinggian permukaan gelombang sebelum melalui pemecah gelombang dan setelah melalui pemecah gelombang. Perubahan ketinggian permukaan gelombang seiring dengan perjalanan waktu yang diberikan dapat dilihat pada gambar 1 berikut ini

Setelah melalui pemecah gelombang pada $x = 0$, sebagian gelombang transmisi ada yang di pantulkan kembali dan ada yang diteruskan melalui pemecah gelombang. Selain itu, sebagian besar gelombang transmisinya diserap oleh pemecah gelombang berporinya. Setelah melalui pemecah gelombang di $x = 50$ ada sedikit gelombang yang dipantulkan kembali melawan gelombang transmisi. Hal tersebut dapat dilihat pada gambar berikut:

Sebelum memaasuki daerah dimana pemecah gelombang berada yaitu pada saat $t = 5$, ketinggian permukaan gelombang atau amplitudo gelombangnya sebesar $A = 0.2471$. Pada saat memasuki daerah dimana pemecah gelombang berada (lihat gambar 2b) sebagian gelombang dipantulkan melawan arah

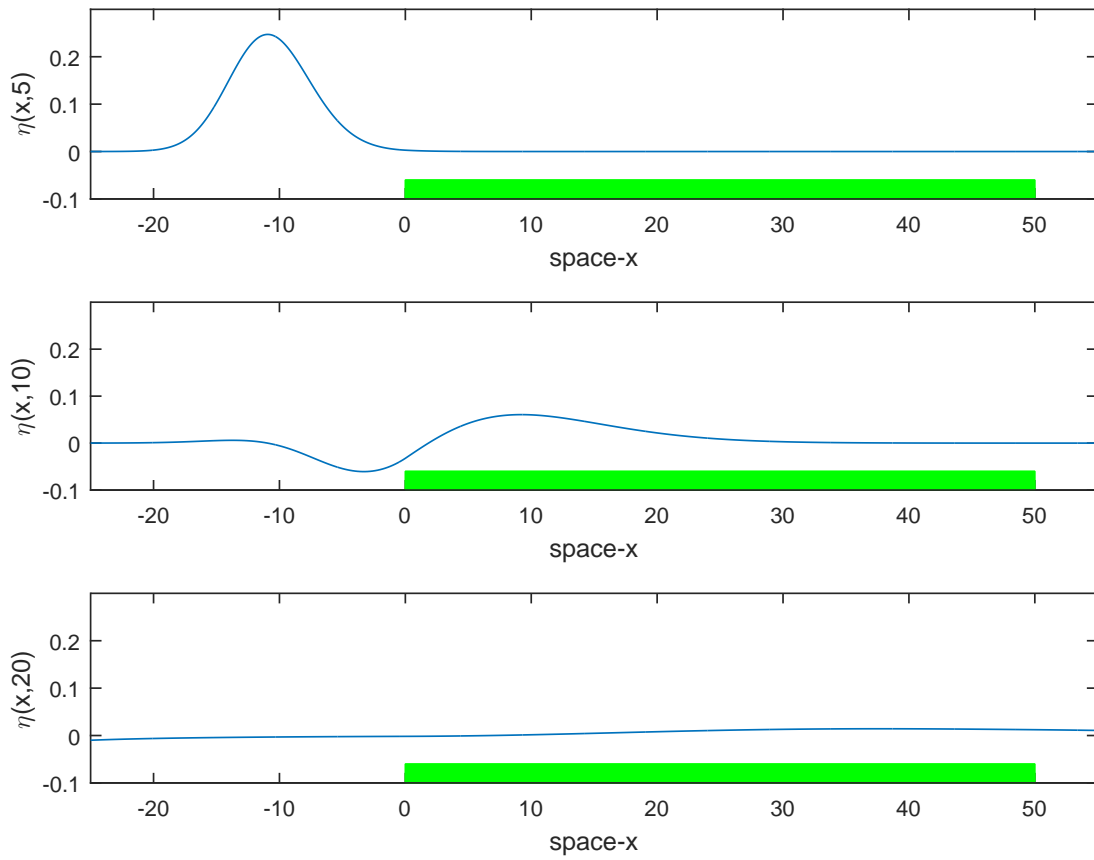


Figure 5: Perjalanan gelombang a) sebelum memasuki pemecah gelombang, b) pada saat berada diatas pemecah gelombang, c) setelah melalui pemecah gelombang

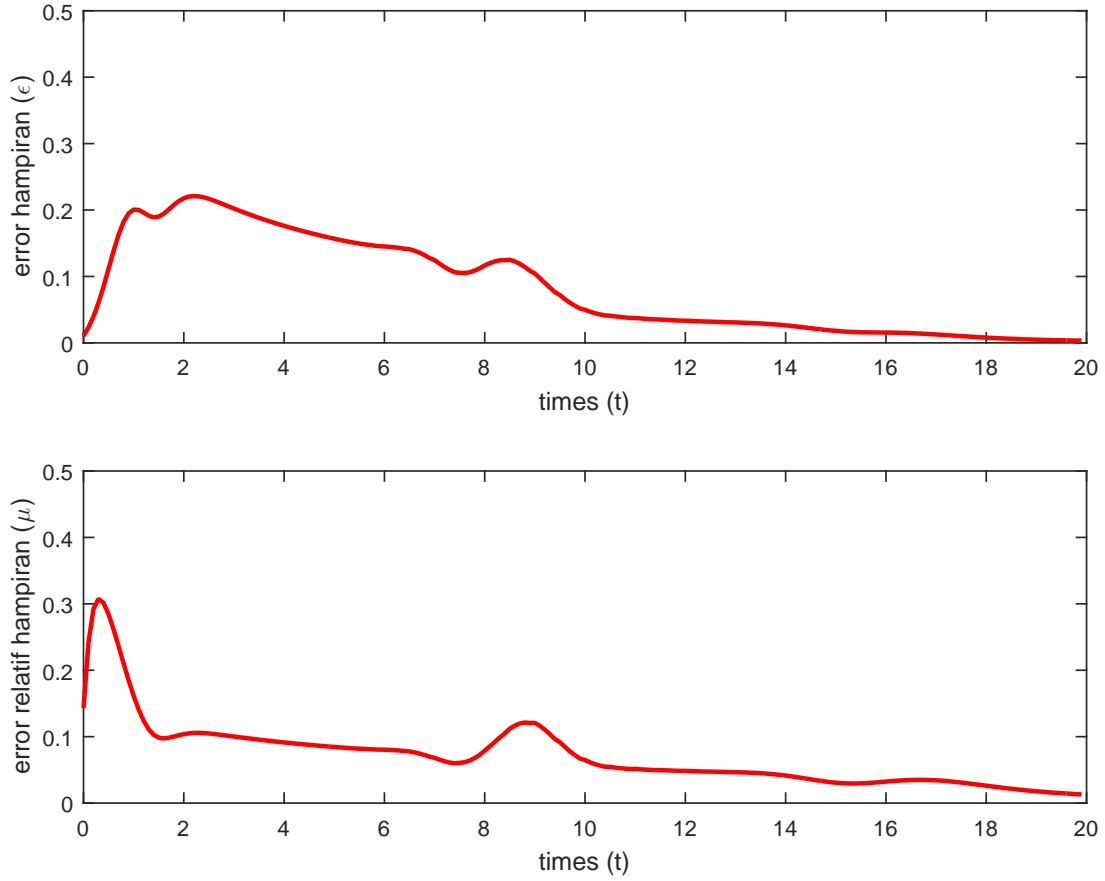


Figure 6: Estimasi Error

gelombang transmisi, dan yang lainnya terus berjalan searah dengan gelombang transmisi dengan amplitudo yang semakin lama semakin berkurang. Setelah melalui daerah pemecah gelombang (pada $t = 20$) amplitudo gelombang transimi berkurang sebesar 94.2% menjadi $A = 0.0576$.

Error Information

Untuk mengetahui performansi dari metode beda hingga implisit, kita menggunakan error hampiran (ϵ) berdasarkan norm dari nilai $\|\eta^{n+1} - \eta^n\|$ serta error relatif hampiran (μ) menggunakan formula

$$\mu = \frac{\epsilon}{\|\eta^{n+1}\|}$$

dengan $n = 1, 2, \dots, (p-1)$ yang mana p didefinisikan sebagai banyaknya titik diskrit untuk waktu (t). Error hampiran beserta error relatif yang diperoleh dari perhitungan disajikan dalam bentuk grafik sebagaimana pada gambar 3.

Dari gambar 3, dapat dilihat bahwa baik error hampiran, maupun error relatifnya sudah cukup kecil yaitu $\max(\epsilon) = 0.2210$ dan $\max(\mu) = 0.3074$. Seiring berjalannya waktu error hampiran dan error relatifnya semakin kecil. Hal tersebut menunjukkan bahwa metode yang digunakan dapat menghasilkan solusi yang sangat baik, yang ditandai oleh error relatif untuk setiap perulangan kurang dari 1.

Kesimpulan

Kita telah menyelesaikan persamaan air-dangkal satu dimensi menggunakan metode beda-hingga implisit. Model tersebut menjelaskan perambatan gelombang melalui sebuah pemecah gelombang berpori, yang mana setelah melalui pemecah gelombang tersebut, amplitudo gelombang berkurang serta energinya juga berkurang. Energi yang dibawa oleh gelombang juga berkurang, secara proporsional terhadap kuadrat dari amplitudo. Pelemahan gelombang tergantung pada dari kuantitas pemecah gelombangnya, konduktivitas hidrolik k dan ketinggian pemecah gelombang $d - h$, karena konduktivitas hidrolik dan ketinggian gelombang muncul sebagai koefisien dari suku pengurang atau penyerap.

Panjang L dari pemecah gelombang berporinya juga mengakibatkan penurunan amplitudo, karena suku dampingnya memuat turunan kedua terhadap ruang, sehingga panjang optimal dari pemecah gelombang tidak ada berlawanan dengan pemecah gelombang yang solid atau tidak berpori. Dalam mengamati model, kita menggunakan gelombang monikromatik dan gelombang sinusidal sebagai gelombang datang, dan perambatannya telah kami hitung sebagaimana berkurangnya amplitudo dan energi gelombang tersebut. Kita juga menemukan fakta bahwa ada pemantulan gelombang yang terjadi setelah gelombang transmisinya mengenai pemecah gelombangnya.

References

- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (1998). Numerical methods for engineers.
- Jamhuri, M., & Alisah, E. (2015). *Evolusi Gelombang Harmonik melalui Serangkaian Balok Berpori*. Available from <https://j4m3sh.wordpress.com/>
- Jamhuri, M., Kusumastuti, A., & Suharleni, F. (2013). *Evolusi Gelombang Harmonik Melalui Balok Berpori* (Tech. Rep.). Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim.
- Mei, C. C. (1989). *The applied dynamics of ocean surface waves* (Vol. 1). World scientific.
- Mizumura, K. (1998). Free surface flow over permeable wavy bed. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(9), 955–962.
- Pudjaprasetya, S. R., & Chendra, H. D. (2009). An optimal dimension of submerged parallel bars as a wave reflector. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 32(1).
- Tsai, C.-P., Chen, H.-B., & Lee, F.-C. (2006). Wave transformation over submerged permeable breakwater on porous bottom. *Ocean engineering*, 33(11), 1623–1643.
- Wiryanto, L., & Anwarus, S. (2009). Monochromatic waves over permeable bed. In *Proceedings of 5th asian mathematical conference* (pp. 617–622). Kuala Lumpur, Malaysia.
- Wiryanto, L. H. (2010). Wave propagation over a submerged bar. *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*, 42(2), 81–90.
- Wiryanto, L. H. (2011). Wave propagation passing over a submerged porous breakwater. *Journal of Engineering Mathematics*, 70(1-3), 129–136.
- Wiryanto, L. H., & Jamhuri, M. (2014). Monochromatic Wave over One and Two Bars. *Applied Mathematical Sciences*, 8(61), 3017–3025.
- Yu, J., & Mei, C. C. (2000). Do longshore bars shelter the shore? *Journal of Fluid Mechanics*, 404, 251–268.
- Zhu, S., Yuan, G., & Sun, W. (2004). Convergence and stability of explicit/implicit schemes for parabolic equations with discontinuous coefficients. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 1(2), 131–146.